Teschl Inhalt:

Band 1

Folgen und Reihen

Band 2

Elementare Funktionen (Einleitung)

Differentialrechnung 1 (Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung)

Differentialrechnung 2 (Taylorreihen, Monotonie, Extremwerte)

Integralrechnung

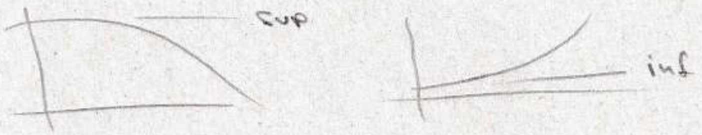
Differentialrechnung in mehreren Variablen

Differentialgleichungen

Teschl Buch 1: Folgen und Reihen

Sätze Folgen

- alle Teilfolgen konvergieren gegen Grenzwert (wenn $\exists$) von Folge
- Jede konvergente Folge ist beschränkt



(mon wachsend / fallend)

- Eine unbeschränkte Folge ist divergent

Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

~~„unendliche Reihe"~~

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

„Teilsumme" (kann konvergieren)

Grenzwert: „Summe der Reihe"

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Wenn auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert: „absolut konvergent"

Beispiel 6.22

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{15}{8} \quad 2$

$S_0 = 1$ ← Teilsummen konvergieren gegen 2

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$\vdots$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$S_1 = 1$

$S_3 = 1{,}36111$ Grenzwert: $\frac{\pi^2}{6}$

$S_{10} = 1{,}54977$

$\vdots$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ divergent

d) $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ harmonische Zahlen, divergent

Beispiel 6.12

Rechen Regeln

$c\,a_n \to c\,a$

$a_n + b_n \to a + b$

$a_n \cdot b_n \to a\,b$

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

a)

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}_{0} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot \overbrace{2}^{c} = 0 + 0\cdot 0\cdot 2 = 0$$

b)

$$b_n = (3 + 100\underbrace{e^{-n}}_{-10^{-n}})\cdot \frac{1}{2^{n-3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = (3 + 100\cdot 0)\cdot 0 = 0$$

c)

$$c_n = \frac{2n^2-3}{n^2+n+1} = \frac{\cancel{n^2}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+1\right)} = \frac{2-\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{2}{1} = 2$$

d)

$$d_n = \frac{-5n+1}{4n^2-7} = \frac{\cancel{n^2}\cdot\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(4-\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{7}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{0}{4} = 0$$

Satz:

ab bestimmten Folgenindex

$a_n \to \infty$ wenn $\forall a_n > 0$ und $\frac{1}{a_n} \to 0$

(monoton wachsend und nach oben unbeschränkt)

$a_n \to -\infty$ wenn $\forall a_n < 0$ und $\frac{1}{a_n} \to 0$

(monoton fallend und nach unten unbeschränkt)

<u>Beispiele</u>

a) $a_n = 2^n$

divergiert gegen ∞

b) $a_n = -n^2$

divergiert gegen $-\infty$

c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(-1)^n \cdot n^2} \not\to 0$ und $\exists n_0$ sodass $\forall a_n > 0$ oder $a_n < 0$

d) $a_n = n + (-1)^n$

divergiert gegen ∞

$n_0 = 1 \quad \forall n \geq 1 \quad > 0$ $\quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+(-1)^n} = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n \cdot (1 + \frac{(-1)^n}{n})} \to \frac{0}{1+0} = 0$

Beispiel 6.15)

a) $a_n = n^3 - n^2$

b) $b_n = -4n^3 + 100n^2$

c) $c_n = \dfrac{7n^3 - n^2}{5n - 1}$

d) $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\log(n)}{10!}$

$$a_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \infty \cdot (1 - 0) = \infty$$

$$b_n = n^3\left(-4 + \frac{100}{n}\right) \longrightarrow \infty \cdot -4 = -\infty$$

$$c_n = \frac{7n^3 - n^2}{5n - 1} = \frac{n^{\cancel{3}\,2}\left(7 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(5 - \frac{1}{n}\right)} = n^2 \cdot \frac{7 - \frac{1}{n}}{5 - \frac{1}{n}} \longrightarrow \infty \cdot \frac{7}{5} = \infty$$

$$d_n = \frac{1}{n^3} + \frac{\log(n)}{10!} \longrightarrow 0 + \frac{1}{10!} \cdot \infty = \infty$$

∞

Eulersche Zahl

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Heron'sche Folge

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) \qquad a_1 \text{ Startwert} > 0$$

Reihen

Wenn gilt:

$\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow$ a_n = Nullfolge

(Nicht umgekehrt)
Nullfolge $\not\Rightarrow$ Reihen Konvergenz bzw Divergenz

Rechenregeln

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergent, also gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

(Multiplikation von Reihen auch möglich, wenn sie absolut konvergent sind)

„Cauchy-Produkt"

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Geometrische Reihen

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \quad \text{(Teilsumme)}$$

$$q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1} \quad \ominus$$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 - q^{n+1}$$

(auflösen nach s_n)

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$\rightarrow$ wenn $|q| < 1$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$

Sonst wenn $q \neq 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

wenn $|q| \geq 1$ dann divergent

Majoranten – Kriterium

Ist $\sum a_k$ konvergent? (man schreibt keinen unteren Index weil auf Konvergenz geprüft wird)

a) Es gibt $\sum b_k$
- konvergent
- $b_k \geq 0$

$\forall k \geq k_0: \quad |a_k| \leq b_k$ „Majorante"

So konvergiert $\sum a_k$

b) Es gibt $\sum b_k$
- divergent
- $b_k \geq 0$

$\forall k \geq k_0: \quad |a_k| \geq b_k$

So divergiert $\sum |a_k|$

Beispiel

Man benötigt immer eine Anzahl an bereits bekannten konvergierenden / divergierenden Reihen.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2}$ => Reihe ist konvergent

konvergiert

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ Harmonische Reihe $\left(\sum \frac{1}{k}\right)$ ← divergiert

$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ gültig $\forall k \geq 1$ => Reihe ist divergent

Quotienten-Kriterium

Ist $\sum a_k$ konvergent?

a) $\exists\ 0 \leq q < 1$

$\forall k \geq k_0 \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad \Rightarrow \sum a_k$ ist konvergent

(Vor allem wenn $\lim\limits_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$)

b) Wenn aber

$\forall k \geq k_0 \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \sum a_k$ ist divergent

(Vor allem wenn: $\lim\limits_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$)

Beispiel:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für welche x konvergiert diese Reihe?

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}\, k!}{(x+1)!\, x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \longrightarrow 0 \qquad 0 = q < 1$$

für alle x konvergent

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

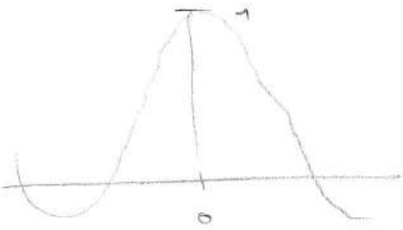
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1} \cdot k}{(k+1) \cdot x^k}\right| = \frac{|x|}{1+\frac{1}{k}} \longrightarrow |x|$$

?

für $x = \pm 1$, konvergent, sonst divergent

Teschl - Differentialrechnung I

Grenzwert und Stetigkeit



$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ist nicht definiert an Stelle 0

Werte nähern sich bei 0 oben 1 an

$\rightarrow$ $f(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Grenzwert $y_0 = 1$

Definition

$f: D \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

wenn für jede Folge $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \longrightarrow x_0$

gilt, dass $f(x_n) \rightarrow y_0$

Folgen:
$f(n) = x_n$

„y_0 ist Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0"

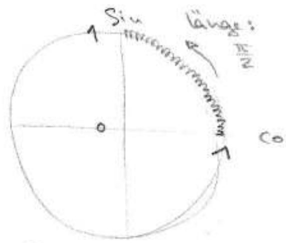
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Wenn Funktionswerte y_0 beliebig nahe kommen sobald die Argumente x der Stelle x_0 beliebig nahe kommen

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \underbrace{\delta(\varepsilon)}_{\text{zugehöriges } \delta \text{ zu einem } \varepsilon} > 0 : \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

Fortsetzung Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$x: \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$\sin: 1 \longrightarrow 0$

$\cos: 0 \longrightarrow 1$

für $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

trifft man die Abschätzung

$$\sin x \leq x \leq \underbrace{\sin x + 1 - \cos x}_{\text{immer } 1}$$

$$0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{x}{1 + \cos x} \quad \frac{1 - \cos x^2}{x^2} = \frac{x}{1 + \cos(x)} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} < x$$

weil $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

Definition

Linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Beispiele:

a) $f(x) = 2x + 1$ $\quad \lim_{x \to 3} (2x+1) = 7$ (keine Überraschung, weil stetige Funktion)

$x_0 = 3$

$f(x_n) = 2x_n + 1 \quad x_n \to 3$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & x < 2 \\ -x + 5 & x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$

$= \frac{1}{2} 2^2 + 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 5) = -2 + 5 = 3$

weil linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert ident sind ist es der Grenzwert

c) $f(x) = \operatorname{sign}(x) \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1$ (Funktion hat einen Sprung)

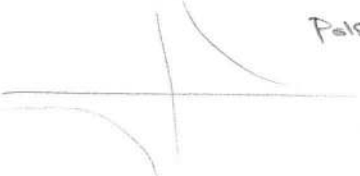
d) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht!

$\cancel{x_n = \frac{1}{n\pi}}$

Zu starke Oszillationen

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Polstelle bei 0

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

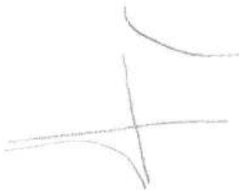
Asymptotisches Verhalten $x \to \pm\infty$

Beispiele

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Folge $x_n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$$ Analog für $-\infty$



b) $$f(x) = \frac{3x+1}{4x-2} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(4-\frac{2}{x}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}}$$

Folge $x_n \to \infty$

ähnlich wie bei Folgen

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{3}{4}$$

Asymptotik elementarer Funktionen

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty \quad \text{zB } x^3 \text{ oder } \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-a} = \frac{1}{x^a} = 0 \quad \text{zB } \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = (-1)^n \cdot \infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{ax} = \infty \qquad a > 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{ax} = 0 \qquad a > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

Beispiel

Logistisches Wachstum

$$L(t) = \frac{S}{1-\left(1-\frac{S}{P_0}\right)\boxed{e^{-at}}} \qquad \boxed{e^{-at}} \to 0$$

$S, P_0, a > 0$ vorgegebene Konstanten

$$\lim_{n\to\infty} L(t) = \frac{S}{1-\left(1-\frac{S}{P_0}\right)\cdot 0} = S$$

Stetigkeit

$x \to x_0$ $\qquad\qquad f(x_0)$

Wenn Grenzwert mit Funktionswert übereinstimmt bedeutet das, dass kleine Abweichungen des Arguments von x_0 auch kleine Abweichungen von $f(x_0)$ mit sich ziehen.

„Stetig an der Stelle x_0"

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$$

Wenn überall in D stetig, dann stetig „auf D"

Die Menge der auf D definierten stetigen Funktionen heißt $C(D)$ bzw. $C^0(D)$ weil Continuous = stetig

Beispiele

a) $f(x) = 2x+1$

für jede beliebige Stelle x_0 gilt: $\lim_{x\to x_0}(2x+1) = 2x_0+1 = f(x_0)$

Also ist f stetig auf $\mathbb{R}$

b) $f(x) = |x|$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$

c) $f(x) = \text{sign}(x)$

nicht stetig weil bei 0 der links und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1, & x \leq 2 \\ -x+5, & x > 5 \end{cases}$ überall stetig

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

Wichtige Sätze über Stetigkeit

Zwischenwertsatz

Wenn Funktion f im Intervall $[a;b]$ stetig
nimmt sie jeden Wert im Intervall $[f(a);f(b)]$ an

=> Daraus folgt auch:
dass es min 1 Nullstelle geben muss wenn f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen haben.

Ermittlung von Regeln

Wenn f(x) und g(x) stetig an Stelle x_0, dann ist ihre Summe $f(x)+g(x)$, das Produkt $f(x)g(x)$, Quotient $f(x)/g(x)$, die Verkettung $f(g(x))$ und $f^{-1}(x)$ stetig an der Stelle x_0

-> geeignete Wahl von D:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist stetig

Beispiele

$f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ (jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig)

$f(x) = x^2 e^x + \sin(x)$ (besteht aus elementaren Funktionen => stetig)

$f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ (Verkettung => stetig)

Satz von Weierstraß

Jede auf einem Intervall abgeschlossene, reelle, stetige Funktion nimmt auf diesem $[a,b]$
-> Intervall ihr Maximum und Minimum an.

-> f ist auf $[a,b]$ beschränkt!

Beispiel

f(x) ist $\frac{1}{x}$ und auf $(0,1)$ stetig
und hat weder ein Minimum noch ein Maximum weil sie nicht abgeschlossen ist

Elementare Funktionen

Tesch Analys

Polynome, linear, quadratisch, kubisch, ...

Rationale Funktionen

Potenzfunktion

Exponentialfunktion

Logarithmusfunktion

Trigonometrische Funktionen / Hyperbel Funktionen

Differentialrechnung 1

Stetigkeit

Beispiel $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad x_0 = 0$

Nicht definiert, Annäherung aber möglich

x	$\pm 0,1$	$\pm 0,01$	$\pm 0,001$
$f(x)$	0,998	0,9999	0,99999

Vermutung: $y_0 = 1$

Bestimmung von Grenzwert mit Folgen

$f: D \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $\quad \forall x_n \in D \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 : f(x_n) \to y_0$

$x_0 \in \mathbb{R}$

→ muss nicht in Definitionsbereich liegen

„Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0"

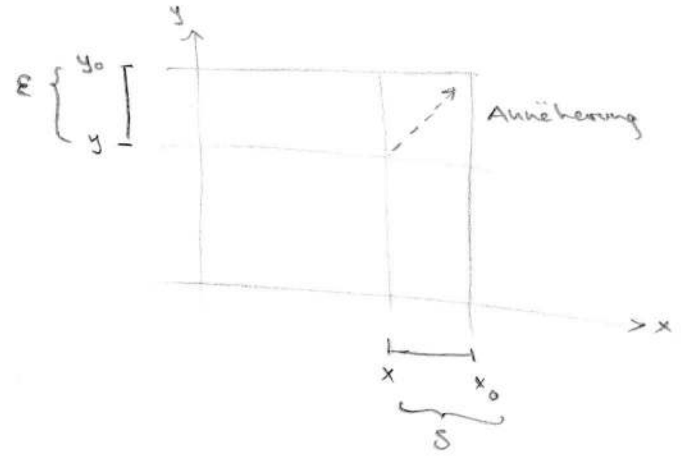
$\underset{x \to x_0}{f(x)} = y_0$

Möglicherweise $y_0 = \pm\infty$

Formale Definition:

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ existiert zugehöriges $\varepsilon(\delta) > 0$, sodass für alle x

$$|x - x_0| \leq \delta \iff |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$



Fortsetzung Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \longrightarrow$$ Berechnung

$$\sin x \leq x \leq \sin x + 1 - \cos(x)$$

für $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(x) \leq x \leq \sin(x) + 1 - \cos(x) \quad | -\sin x$$

$$0 \leq x - \sin(x) \leq 1 - \cos(x) \quad | : x$$

$$0 \leq 1 - \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x}}$$

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} =$$

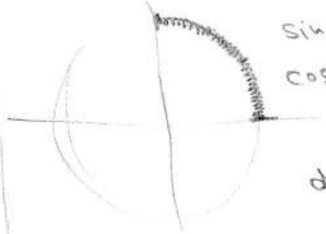
$$\frac{x}{1 + \cos(x)} \cdot \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} =$$

$$\underbrace{\frac{x}{1 + \cos(x)}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)^2}{x^2}} \leq x$$

$1 + \cos(x) \geq 1 \qquad \sin(x) \leq x$

konvergiert gegen Null wenn $x \to 0$

$f(0) = 1$ würde Sinn machen



sin : 0 bis 1

cos : 1 bis 0

deshalb

$$\underbrace{\sin x}_{0 \ldots 1} + \underbrace{1 - \cos x}_{1 \ldots 0}$$

$x = 0$: $0 + 1 - 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $1 + 1 - 0 = 2$

$$\underbrace{\sin x}_{0 \ldots 1} \leq \underbrace{x}_{\frac{\pi}{2} = 1{,}5} \leq \underbrace{\sin x + 1 - \cos x}_{0 \ldots 2}$$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Linksseitiger Grenzwert $\quad x_0 \quad$ Rechtsseitiger Grenzwert

Wenn beide gleich sind gibt es „den" Grenzwert

Rechenregeln:

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b \right)$$

$$c \cdot f(x) \to ca$$

$$f(x) \pm g(x) \to a \pm b$$

$$f(x) \cdot g(x) \to ab \quad \text{(auch Division)}$$

Beispiele

a) $f(x) = 2x + 1 \qquad x_0 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Folge } x_n \to 3 \\ f(x_n) = 2x_n + 1 \end{array}\right\} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & x < 2 \\ -x + 5 & x > 2 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 2$ → hier nicht definiert: $x_0 \notin D$

Man muss links und rechtsseitigen Grenzwert benutzen

Links

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) = \frac{1}{2} 2^2 + 1 = 3$$

Rechts

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 5) = 3$$

Auf beiden Seiten ident → stetig

Funktionen die an x_0 keinen definierten Wert besitzen

Beispiele : gesucht: $x_0 = 0$

a) $f(x) = \text{sign}(x)$

Vorzeichenfunktion

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Links und rechtsseitiger Grenzwert sind unterschiedl.

(Sprung in Funktion, unstetig)

b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Vermutung: immer stärkere Oszillation

$x_n = \frac{1}{n \cdot \pi} \to 0$

Beliebige Folge die gegen 0 konvergiert

$f(x_n) \to f(0)$

$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

konvergiert aber nicht gegen 0

unstetig!

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Polstelle $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

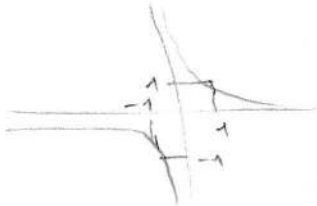
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Untersuchung des asymptotischen Verhaltens $\lim_{x\to\pm\infty}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$



b) $f(x)=\frac{3x+1}{4x-2}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(4-\frac{2}{x}\right)}=\frac{3+\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{3+0}{4-0}=\frac{3}{4}$

Asymptotik von elementaren Funktionen

x^a wenn $a>0 \to \infty$

$x^{-a}\to 0$

$x^n \to (-1)^n\infty$

e^{ax} $a>0 \to \infty$

$\ln(x)\to\infty$ wobei $\lim_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$

Beispiel

Logistisches Wachstumsmodell

$\underbrace{L(t)}_{\text{time}}=\frac{S}{1-\left(1-\frac{S}{P_0}\right)\underbrace{e^{-at}}_{\text{konvergiert gegen 0}}}$ $\quad S, P_0, a>0 \qquad \lim_{t\to\infty} L(t)=\frac{S}{1-0}=S$

Stetigkeit

Funktionswert $f(x_0)$ und Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ stimmen überall überein

„kleine Änderungen im Input, bewirken kleine Änderungen im Output"

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)=f(x_0)$$

Bei vollständig definierten Funktionen!

Bei Intervallen: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

C(D)

Menge aller in D stetigen Funktionen

Beispiele Stetigkeit

a) $f(x) = 2x+1$

Für jede Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} (2x+1) = 2x_0+1 = f(x_0)$

($f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$)

b) $f(x) = |x|$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x \to x_0} |x| = f(x_0)$

c) $f(x) = \text{sign}(x)$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \lim\limits_{x \to x_0} \text{sign}(x) = f(x_0)$

bei 0 stimmen rechts und linksseitiger Grenzwert nicht überein

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1 & x \leq 2 \\ -x+5 & x > 2 \end{cases}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}: \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Bei $x_0 = 2$ stimmen link. Gren. und rechts. Gren. überein

weshalb es für $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

Wichtige Sätze:

Zwischenwertsatz

Wenn $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ stetig ist,
dann nimmt sie alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

$\Downarrow$

Daraus folgt: wenn $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ dann $\exists$ Nullstelle im Intervall

Stetigkeit für elementare Funktionen

Elementare Funktionen sind stetig

Aber konkreter:
wenn $f(x)$ und $g(x)$ an Stelle x_0 stetig, dann ist x_0 auch stetig wenn

$f(x) \pm g(x)$
$f(x) \cdot g(x)$
$f(x) / g(x)$ $\longrightarrow$ Daraus folgt: Polynome und rationale Funktionen stetig
$f(g(x))$
$f^{-1}(x)$ bzw $g^{-1}(x)$

Damit auch $\frac{1}{x}$ weil $x_0 = 0$ nicht definiert ist

Satz von Weierstraß

Wenn $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ stetig und abgeschlossen ist,
hat sie ein $\underbrace{\text{Maximum und Minimum}}$ im Intervall

Maximum und Minimum müssen tatsächlich erreicht werden,
während limes inf und limes sup nicht erreicht werden müssen.

(Def: Abgeschlossenheit
Intervall wird nicht verlassen)

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0;1)$ abgeschlossen (damit stetig)
und besitzt ein MIN und MAX in diesem Intervall
Und nimmt alle Werte zwischen $(f(0);f(1))$ an.

Die Ableitung

Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

Funktion ist differenzierbar an $x_0 \in D$ wenn

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Gleichung der Tangente an dieser Stelle: $t(x) = \underbrace{f(x_0)}_{d} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{kx}$

„Stetig differenzierbar"

wenn Ableitung stetig ist

Menge aller stetigen Funktionen in D:

$C^1(D)$

Beispiele

ist Funktion differenzierbar?

a) $f(x) = 2x+1$

beliebige Stelle $x_0 \in D$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(2x+1) - (2x_0+1)}{x - x_0} = \frac{2(x-x_0)}{x-x_0} = 2$$

b) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad f'(x_0) = \begin{cases} -1, & x_0 < 0 \\ 1, & x_0 \geq 0 \end{cases}$

Funktion ist an Stelle x_0 nicht stetig / differenzierbar

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

rechtsseitig

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

c) $f(x) = \mathrm{sign}(x)$

überall $f'(x) = 0$ außer $x_0 = 0$ (unstetig)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-1-1}{x} = \underbrace{\frac{-2}{x}}_{\text{wenn } x \to 0^-} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1-1}{x} = 0$$

Satz Wenn Funktion differenzierbar, dann stetig
Wenn stetig, muss nicht differenzierbar sein

Linearisierung

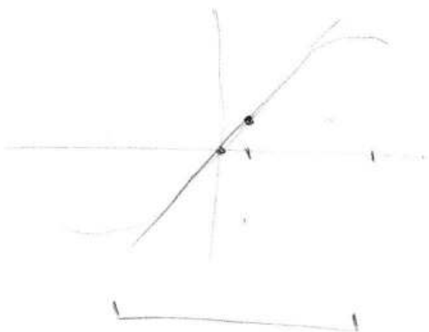
Approximation einer Funktion durch Tangente

$$f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel $f(x) = \sin(x)$

$x_0 = 0$

$f(x_0) = 0$



$x = 0{,}2$

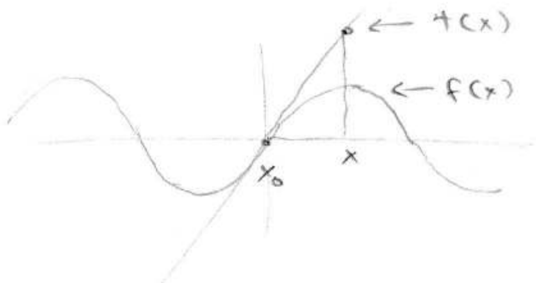
$$f(0{,}2) \approx t(0{,}2) = \underbrace{f(x_0)}_{0} + \underbrace{f'(x_0)}_{\cos(0) = 1} \cdot \underbrace{(0{,}2 - 0)}_{0{,}2}$$

für uns nur dieser Teil relevant, deshalb Approximation ausreichend

$\sin(0{,}2) \approx 0{,}2$

$\sin(0{,}2) = 0{,}198669$

→ je weiter x von x_0 entfernt ist, desto ungenauer die Approximation



Mittelsatz der Differentialrechnung

f im Intervall $[a;b]$ stetig und $(a;b)$ differenzierbar

$\exists x_0 \in (a,b)$ sodass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Spezialfall

Satz von Rolle

$a < b$ und $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die in $(a;b)$ differenzierbar ist,

wenn gilt $f(a) = f(b)$, $\exists x_0 \in (a,b)$ sodass $f'(x_0) = 0$

Ableitungsregeln

f und g sind in x differenzierbar:

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \quad c \in \mathbb{R}$

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ „Produktregel"

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$ „Quotientenregel"

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ „Kettenregel"

Beweis

$\Delta fg = f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) = \dots = (f(x) - f(x_0))\, g(x) + f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))$

Deshalb gilt:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = f'(x)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x)$$

Anwendung

$f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 2x$

Anwendungsbeispiel : Wirtschaftsmathematik

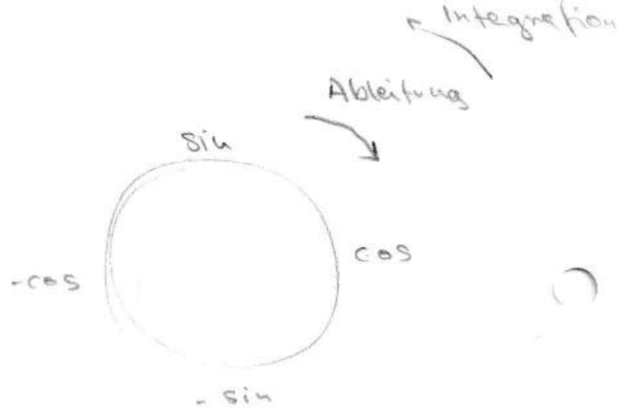
Prozentuelle Änderung $\quad p = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_0)}$ von f zwischen x_0 und x_1

$f(x_1) = f(x_0) + p \cdot f(x_0)$

$f(x_1) = f(x_0)(1+p)$

Ableitung von elementaren Funktionen

$f(x)$	$\longrightarrow$	$f'(x)$
c		0
x^n		$n\,x^{n-1}$
$\log_a(x)$		$\dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$		$\dfrac{1}{x}$
a^x		$a^x \ln(a)$
e^x		e^x



Beispiele

$p(x) = 2x^3 + \sqrt{x} - 1 \qquad p'(x) = 6x^2 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$q(x) = \dfrac{x}{x^2-1} = x : (x^2-1) \qquad \dfrac{1 \cdot (x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} = q'(x)$

$\dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \dfrac{-x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$

$h(x) = x^2 e^x \qquad h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2) = xe^x(2+x)$

$k(x) = (3x^5 - x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad k_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Verkettete Funktion $\quad k_2(x) = 3x^5 - x$

Kettenregel

$k_1'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$k_2'(x) = 15x^4 - 1$

$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (3x^5 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot$

$15x^4 - 1$

$k'(x) = k_1'(k_2(x)) \cdot k_2'(x)$

Von außen nach innen, Schrittweise hinten anhängen f ist genau dann umkehrbar, wenn f streng monoton wachsend ist (weil es dann bijektiv ist)

Eine differenzierbare Funktion ist streng mon wachsend / fallend wenn $f'(x) < 0$ bzw > 0 für $\forall x$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall x \in D: f'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists f^{-1}(x)$$

$$f^{-1\,'}(x) = \frac{1}{f'\cdot(f^{-1}(x))}$$

Beispiel

$f(x) = \sin(x)$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

x ist nur in $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\underbrace{\cos(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos(x) = \sqrt{1-\sin(x)^2}$

Regel von de l'Hospital

Sonderregel bei der man nicht die Quotientenregel benutzt:

f und g sind differenzierbar.

Wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{ODER} \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$$

Dann bei Berechnung von Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\boxed{\text{Wichtig: } x_0 \text{ darf } \pm\infty \text{ sein!}}$

Regel von de l'Hospital:

wenn man Grenzwert berechnet von $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $x \to x_0$ bzw $x \to \infty$

dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

dann $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ statt Quotientenregel

Beispiel

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Regel:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{\frac{1}{1+0}}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\frac{1}{x}}} =$

$\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(0)}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$ Regel:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 e^{-x}) = \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ Regel:

zweimal anwenden

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ \text{Regel:} \\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{array} \right.$$

Höhere Ableitungen

Rekursive Definition

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \dot{f}(x)$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \ddot{f}(x)$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \dddot{f}(x)$$

$$\vdots$$

$f^{(n)}(x) \longrightarrow$ n-te Ableitung von f

Beispiel:

a) $g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\quad g''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad g(5) = -\frac{1}{25}$

b) $h(x) = 2 \cdot e^x$ $\quad h''(x) = 2e^x$ $\quad h''(0) = 0$

c) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ $\quad f'(x) = 6x^2 - 4$ $\quad f''(x) = 12x$ $\quad f''(2) = 24$

d) $f(x) = \sin(x)$ $\quad f'(x) = \cos(x)$ $\quad f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f'''(x) = -\cos(x)$

$f''''(x) = \sin(x)$

$C^k(D)$

$D \in \mathbb{R}$ Die Menge der k-fach auf D ableitbaren Funktionen

Weil sin und cos ∞ mal ableitbar sind sind sie $\in C^\infty(\mathbb{R})$

Partielle Ableitung

Ableitung nach einer Variable

statt $\frac{d}{dx}$ schreibt man $\frac{\partial}{\partial x}$

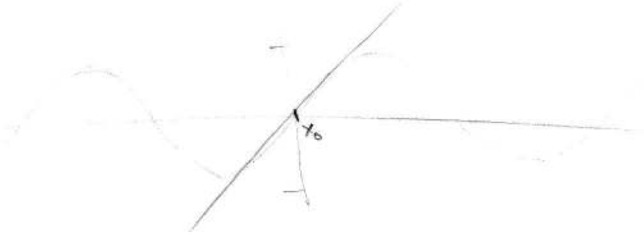
Beispiel: $f(x,y) = 3xy^2 + \cos(x)$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3y^2 - \sin(x)$ $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 6xy$

Alle anderen Variablen sind Konstanten

Taylorreihen / Taylorpolynome

Approximation von Funktionen in der Nähe von x_0 bisher mit Gerade
Polynom Grad 1



Weitere Annäherungen:

$f(x) = x$ Grad 1

$f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ Grad 3

$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ Grad 5

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Sodass

$T_n(x) \approx f(x)$

Voraussetzung

$f(x)$ muss oft genug ableitbar sein

$f(x_0) = T(x_0) = a_0$ < wenn $T(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{(x_0-x_0)}_{=0}{}^k = a_0 (0)^0 = a_0$

$f'(x_0) = T'(x_0) = a_1$ < $T'(x_0) = a_1 + 2a_2(x-x_0)^1 + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1}$

$f''(x_0) = T''(x_0) = 2a_2$ < $T''(x_0) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots$

$f'''(x_0) = T'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3$

$f^4(x_0) = T^4(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4$

$\vdots$

$f^k(x_0) = T^k(x_0) = k!\, a_k$

bzw $a_k = \frac{T^k(x_0)}{k!}$

Definition

$f: D \mapsto \mathbb{R}$
$x_0 \in D$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) \cdot (x-x_0)^0 + f'(x_0) \cdot (x-x_0)^1 + f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + \dots \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

x_0 ... Entwicklungspunkt

Taylor - Polynom - Beispiele

a) $f(x) = \sin(x) \qquad x_0 = 0$

$$T_3(x) = \frac{f^0(0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^1(0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^2(0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f^3(0)}{3!}\cdot(x-x_0)^2$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}$$

Approximation mit Taylor Polynom von Grad 3 mit Entwickl. Punkt $x_0 = 0$

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

b) $f(x) = e^x \qquad x_0 = 1$

$$T_3(x) = \frac{f^0(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f^1(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f^2(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^3(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$T_3(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$$

$f^n(x) = e^x$

$f^n(1) = e^1 = e$

Der Fehler bei Approximation $f(x) \approx T_n(x)$ heißt „Restglied"

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \\ T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \end{array}\right\} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{R_3(x)}$$

wenn $x = 0{,}2$

$$R_3(0{,}2) = \sin(0{,}2) - T_3(0{,}2) = 2{,}66 \cdot 10^{-6}$$

Restglied

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Abschätzung von $|R_n(x)|$

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ ist $(n+1)$-Mal differenzierbar

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

obere Schranke von $|f^{n+1}(x)|$ in D

Beispiel

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{} + R_3(x)$$

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4!} |x - x_0|^4$$

obere Schranke $f^4(x)$

wenn $x_0 = 0$

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{24} |x|^4$$

Alternative Notation:

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{O}_{}(x - x_0)^{n+1}$$

Landau Symbol, Konstante denn egal

Taylor-Reihen

Annäherung der Funktionen besonders interessant, wenn sie ∞ mal abgeleitet werden kann

Grenzwert von Reihe = Funktion (muss nicht immer zutreffen)

Definition

$f: D \mapsto \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$

unendliche Reihe mit Entwicklungspunkt x_0

$$= \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Satz

Für $\forall$ $\overbrace{\text{Taylorreihen}}^{\text{Potenzreihen}}$ $\exists\, r \geq 0$ sodass wenn

$|x - x_0| < r$ die Reihe konvergiert

$|x - x_0| > r$ die Reihe divergiert

($r = \infty$, $r = 0$ erlaubt)

Konvergenzbereich

$(x_0 - r,\ x_0 + r)$ ← Konvergenzradius

Beispiel für Taylor-Reihen

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für } |x| < 1 \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad |x| < 1$$

(siehe Buch Seite 82)

Herleitung:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$ konvergiert gegen $\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{Funktion}}$ wenn $|x| < 1$

$$\sin(x) = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

In Taylorreihen darf x beliebig ersetzt werden!

$$\sin(2x) = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1}$$

Satz Somit können Taylor-Reihen (in ihrem Konvergenzintervall) addiert und sogar differenziert werden

Satz Taylorreihen dürfen in ihrem Konvergenzintervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ unendlich oft differenzierbar

Eigenschaften von Taylor-Reihen: Immer nur im bestimmten Konvergenzintervall

$(x_0 - r,\ x_0 + r)$

$|x - x_0| < r$ (Radius)

Kombination

$$\sin(2x) = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \boxed{2x}^{2k+1}$$

Addition

$f(x) + g(x) \rightarrow \Sigma + \Sigma$ Taylor-Reihen dürfen addiert werden

Ableitung

Taylor-Reihen können unendlich oft abgeleitet werden

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\frac{f^k(x_0)}{k!}} (x - x_0)^k \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$$

(Konvergenzradius bleibt gleich)

Umgekehrt: Von Ableitung zur Funktion:

$$f'(x) = \sum_{k=0} b_k (x - x_0)^k \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

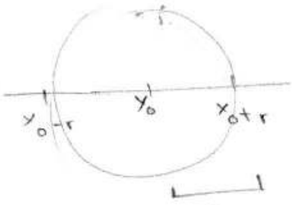
Beispiel: $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$(e^x)' = 1 + \frac{2x}{2 \cdot 1} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = e^x \quad ✓$$

↓

Konvergiert für komplexe Werte



Reihe konvergiert irgendwo in diesem Kreis

r = Konvergenzradius

$|x - x_0| < r$, sodass Potenzen kleiner werden

Monotonie

$f'(x) \geq 0$ monoton wachsend

$f'(x) \leq 0$ monoton fallend

$f'(x) = 0$ Höhepunkt / Senke

Beispiel: Strenge Monotonie

$f(x) = x^3 + 1 \quad f'(x) = 3x^2$ nur bei $x = 0$ $f'(x) = 0$ $\rightarrow$ nur Punkt, kein Intervall
deshalb streng mon wachs

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$$

$\rightarrow$ Nullstellen bei $x = -2$
$x = 1$

keine Intervalle,
von $-2 \leq x \leq 1$ streng mon fallend
sonst streng mon wachsend

Krümmung

$f''(x) \leq 0$ konkav / rechts

$f''(x) \geq 0$ konvex / links

Beispiel:

$f(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$ konvex in $\mathbb{R}$

$f(x) = \ln(x) \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad x \in (0, \infty)$ konkav (≤ 0)

$f(x) = x^2 \quad f''(x) = 2$ konvex in $\mathbb{R}$

$f(x) = x^3 \quad f''(x) = 6x$ konvex in $\mathbb{R}^+$

Optimierung / Extremstellen

Bestimmung von Max und Min (lokal oder global)

$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) > 0$ lokales Minimum

$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0$ lokales Maximum

Satz

f ist n Mal differenzierbar in $(a;b)$ $\quad x_0 \in (a;b)$, $f'(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ Erste höhere Ableitung bei der das zutrifft

wenn n ... gerade $\quad x_0$ = lokales Maximum / Minimum (abhängig von $f''(x_0) \gtrless 0$)

wenn n ... ungerade $\quad x_0$ = Sattelpunkt

Wendepunkt

Änderung der Krümmung

$f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$ Wendepunkt

$f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$ Sattelpunkt (Wendepunkt + Extremstelle)

Beispiel Extrema im abgeschlossenen Intervall

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{falls } -1 \leq x < 0 \quad x \in [-1; 0) \\ 1 - x + x^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \quad x \in [0; 1] \end{cases}$$

Funktion ist bei 0 stetig aber links und rechtsseitiger Grenzwert der Ableitung stimmen nicht überein.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \text{ bzw } (1+x)' = \lim_{y \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \text{ bzw } \underbrace{(1-x+x^2)'}_{-1+2x} = -1$$

$f'(0)$ nicht differenzierbar

Ableitung 1. Teil:

$[-1; 0)$ $f'(x) = 1$ → keine Nullstellen → Annahme Minimum am Rand bei $f(-1) = 0$

Ableitung 2. Teil:

$[0; 1]$ $f'(x) = -1 + 2x$ → $-1 + 2x = 0$

$2x = 1$

$x = 0{,}5$

→ Annahme Maximum bei Rand am $f(1) = 1$

Auch $f(0) = 1$

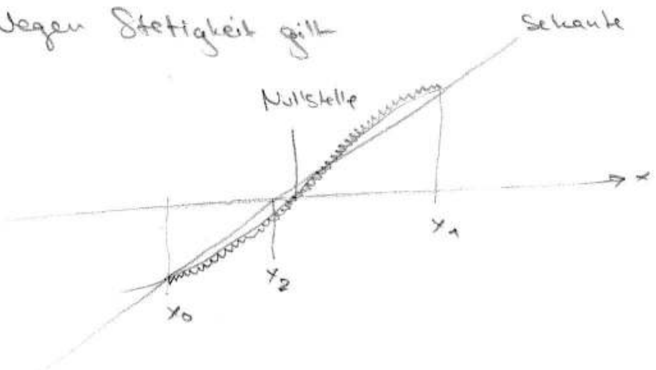
$f''(x) = 2$ → lokales Min

Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen

Bei Polynomen ab Grad 5 nicht mehr Berechenbar

Deshalb $\exists$ Näherungsverfahren

Wegen Stetigkeit gilt



wenn $f(x_0)$ und $f(x_0)$ verschiedene Vorzeichen haben

Nullstelle liegt in $[x_0; x_1]$

x_0 ——— | ——— | ——— x_1

x_2 Nullstelle

Nullstelle der Sekante als Näherungswert

Die Sekante zwischen x_0, x_1 muss auch eine Nullstelle haben

$S(x) = kx + d$

$S(x_0) = f(x_0)$ $\qquad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ $\qquad d = S(0)$

$S(x_1) = f(x_1)$

$\underset{\sim}{S(x_2) = 0}$ $\rightarrow S(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot x_2 + S(0)$

$$S(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot x + S(0)$$

$$S(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot x_2 + S(0)$$

$$\underset{=0}{S(x_2)} - S(0) \over 1$$

$$\frac{\overset{=0}{S(x_2)} - S(0)}{1} \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = x_2$$

$$-S(0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = x_2$$

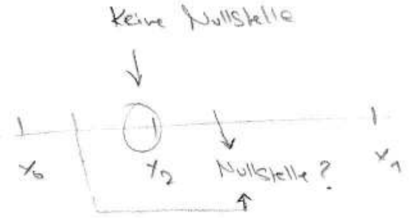
Bzw nach Buch:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Wenn nicht nur $S(x_2) = 0$ sondern auch $f(x_2) = 0$ hier beenden

Sonst: weiter machen

Die nächsten Kandidaten:



$f(x_2)$ und $f(x_0)$ verschiedene Vorz.

$\rightarrow$ Nullstelle links von x_2

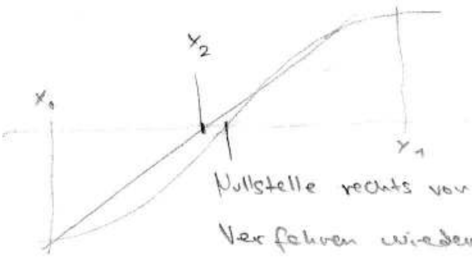
$f(x_2)$ und $f(x_1)$ verschiedene Vorz.

$\rightarrow$ Nullstelle rechts von x_2

Verfahren wiederholen:

Bezeichnung:

„Regula Falsi"



Nullstelle rechts von x_2

Verfahren wiederholen mit $x_0 \rightarrow x_2$

x_1 bleibt x_1

x_2 finden

Normalerweise mit Folge:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Bezeichnung:

„Sekanten Verfahren"

$\rightarrow$ muss nicht konvergieren

Beispiel:

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

(Nur eine Nullstelle)

$x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

weil $\underbrace{f(x_0)}_{-7}$ und $\underbrace{f(x_1)}_{16}$ versch. Vorzeichen haben

Annäherung

$\rightarrow x_2 = 1{,}30435$

$x_3 = 1{,}35791$

$x_4 = 1{,}36901$

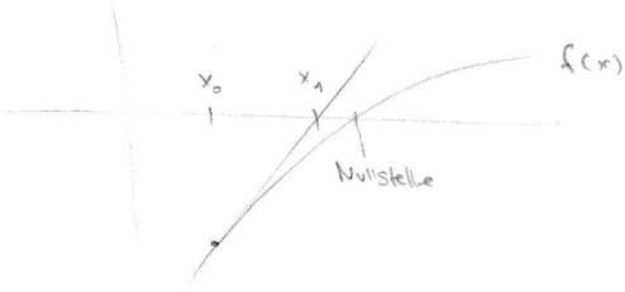
$x_5 = 1{,}36881 \longrightarrow$

Lösung:

$1{,}3688081$

Newton - Verfahren

Tangente statt Sekante benutzt



1. x_0 wählen (muss nahe genug sein)

2. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\vdots$

$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ $\Big\}$ Folge kann divergieren oder gegen falschen Wert konvergieren

Beispiel Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ sind Nullstellen der Funktion

$f(x) = x^2 - 2$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1})^2 - 2}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}5$

$x_2 = 1{,}41422$

$\vdots$

$x_4 = 1{,}414121$ ... Konvergiert gegen $\sqrt{2}$

(Heron - Verfahren)

Kontraktionsprinzip

Newton - Verfahren vereinfacht:

$$x_{n+1} = \underbrace{F(x_n)}$$

Stetige Funktion: $x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Diese Folge kann gegen Fixpunkt $\bar{x}$ konvergieren.

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = F(\bar{x})$$

$\bar{x} = F(\bar{x})$ $\rightarrow$ keine Änderung mehr

Definition

wenn $|F(x) - F(y)| \leq c \cdot |x - y|$

für $\forall x, y \in [a; b]$, $c < 1$ dann heißt F „Kontraktion auf $[a; b]$"

(wenn F differenzierbar
und $|F'(x)| \leq c$ für alle $x \in [a; b]$ dann heißt F —"—)

Integralrechnung

Stammfunktion $F(x)$

$F'(x) = f(x)$ ⟶ gibt es nur ein Stammfunktion? Ja!

Angenommen F und G sind Stammfunktionen

$F'(x) = G'(x) = f(x)$

$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = \underline{\underline{0}}$

Unbestimmtes Integral

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{„Integrand"}} \, d\underbrace{x}_{x = \text{„Integrationsvariable"}} = F(x) + \underbrace{C}_{\text{„Integrationskonstante"}}$$

Beispiel

$f(x) = 2x \qquad F(1) = 2$

$\int f(x)\, dx = x^2 + C$

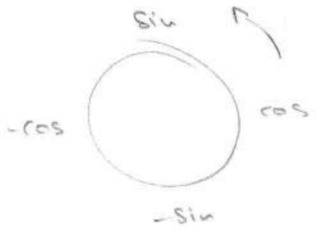
$F(x) = x^2 + C$

$F(1) = 1 + C = 2$

$C = 1$

Integrations-Regeln

c	cx
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
x^{-1}	$\ln(x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$



$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx + C$

$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx + C$

Beispiel

$\int 3\, dx = 3x + C$

$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int t^{-0{,}5}\, dt = \frac{t^{-0{,}5+1}}{-0{,}5+1} + C = \frac{t^{0{,}5}}{0{,}5} + C$

Beispiel

$$\int \left(a \sin(x) + 2e^x - \frac{1}{x}\right) dx \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$= a \int \sin(x)\, dx + 2 \int e^x\, dx + \int -x^{-1}\, dx$$

$$= a \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^x - \ln|x| + C$$

Wichtig

keine Regeln für Multiplikation, Division, Verkettung

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

Integrations-Techniken

Partielle Integration

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx + C$$

Begründung: Produktregel bei Ableitung

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (f \cdot g)' - f'g \quad \Big| \int$$

$$\int fg' = f \cdot g - \int f'g$$

$$\int f(x)\, g(x) = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, G(x)\, dx + C$$

Beispiel

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx$$

weil man x leicht ableiten kann und cos leicht integrieren kann

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos(x) \qquad G(x) = \sin(x)$

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \underbrace{\int 1 \cdot \sin(x)\, dx}_{-\cos(x)} + C = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

Andere Herangehensweise

$$\int \cos(x)\, x\, dx =$$

$$\cos(x) \frac{x^2}{2} - \int -\sin(x) \cdot \frac{x^2}{2}\, dx + C \longrightarrow \text{Problem}$$

Partielle Integration (Lösungs-Ansatz bei Multiplikation)

$$\int f(x)\, g(x) = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx + C$$

Beispiel

$$\int \frac{4\ln(x)}{x}\, dx \text{ für } x > 0$$

$f(x) = 4\ln(x)$ $f'(x) = \frac{4}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $G(x) = \ln(x)$

$$\int \frac{4\ln(x)}{x}\, dx = 4\ln(x)\cdot\ln(x) - \underbrace{\int \frac{4\ln(x)}{x}\cdot dx}_{\text{Ausgangssituation}} + C \qquad \Big| + \int \frac{4\ln(x)}{x}\, dx$$

$$2\int \frac{4\ln(x)}{x}\, dx = 4\ln(x)^2 + C$$

$$\int \frac{4\ln(x)}{x}\, dx = 2\ln(x)^2 + \frac{C}{2}$$

Integration durch Substitution

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du + c \qquad u = g(x)$$

$$\int f(G(x))\cdot g(x)\, dx = \int f(u)\, du + c \qquad u = G(x)$$

Begründung: Folgt aus Kettenregel für Ableitung

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F(u) = F(g(x))$$

$$F(g(x))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F(u) = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx + c$$

Beispiel

$$\int \sin(x^2)\, 2x \; dx$$

$$\int f(G(x)) \cdot g(x)\, dx = \int f(u)\, du + c \quad u = G(x)$$

$f(x) = \sin(x)$

$G(x) = x^2$

$g(x) = 2x$

$$\int \sin(\underbrace{x^2}_{u})\, \underbrace{2x}_{u'} \; dx =$$

wir substituieren $x^2 = u$ und anschließend $u' = \frac{du}{dx} = 2x$

das bedeutet $dx = \frac{1}{2x}\, du$

$$\int \sin(u)\, 2x \; du = \int \sin(u)\, \underbrace{2x \cdot \frac{1}{2x}}_{1}\, du = \int \sin(u)\, du =$$

$$= -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C$$

Beispiel

$$\int \underbrace{(3x^2-1)}_{u}^{\frac{1}{2}} \cdot x \; dx =$$

wir substituieren $3x^2 - 1 = u$, $u' = \frac{du}{dx} = 6x$

das bedeutet $dx = \frac{1}{6x}$

$$\int u^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x \frac{1}{6x}}_{\frac{1}{6}}\, du = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{6}\, du = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{1} \cdot \frac{2}{3} + c = \frac{1}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9} (3x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Es kann nicht jede Funktion die abgeleitet werden kann auch integriert werden

Integration der Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0} a_k (x - x_0)^k$$ mit Konvergenzradius r:

konvergent für $|x - x_0| < r$

$$F(x) = \sum_{k=0} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Beispiel

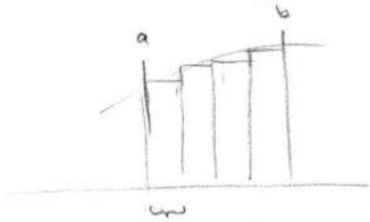
$\frac{\sin(x)}{x}\, dx$ lässt sich nicht integrieren aber mit einer Taylor-Reihe annähern

und dann stückweise integrieren

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \dots$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \pm \dots$$

Bestimmte Integration



Segment a bis b in n gleich breite Rechtecke

$$\Delta n = \frac{b-a}{n}$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f(x_k)}_{\text{Höhe}} \underbrace{\Delta n}_{\text{Breite}}$$

$x_0 = a$

$x_1 = a + \Delta n$

$x_2 = a + 2\Delta n$

$x_n = a + n \Delta n$

$\lim_{n \to \infty} F_n$ für höchste Präzision

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta n$$

Regeln für partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

wenn $f(x) \leq g(x)$ in $[a;b]$ dann

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{wenn } a < b$$

Hauptsatz der Differential und Integral-Rechnung

f ist stetig auf $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{F(x)\big|_a^b}$$

Beispiele

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_0^1 (2e^x + x)\,dx = 2 \cdot e^x + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2e - \frac{3}{2}$$

Partielle Integration für bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Substitution für bestimmtes Integral

$$\left(\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \qquad \text{mit } u = g(x) \right)$$ zu kompliziert

Beispiele

$$\int_0^1 x e^x \, dx = xe \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx = \underbrace{1 \cdot e^1} - \underbrace{0 \cdot e^0} - \underbrace{e^x \Big|_0^1} = e - e^1 + e^0 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{partielle Integration}$$

$$\int_0^\pi \sin(x^2)\, x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} \sin(u)\, du = -\frac{1}{2} \cos(u) \Big|_0^{\pi^2} = -\frac{1}{2} \left(\cos(\pi^2) - 1 \right) = 0{,}951$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = u = x^2 \\ g'(x) = 2x = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2x} \cdot du \end{array} \right\} \text{Substitution}$$

Umwandlung der Grenzen

$$\Big|_0^\pi \rightarrow \Big|_{g(0) = 0}^{g(\pi) = \pi^2}$$

Alternative:

Mit Substitution Stammfunktion berechnen

$$\int \sin(x^2)\, x \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} \left(\cos(\pi^2) - 1 \right) = 0{,}951$$

Integration von Stückweise stetigen Funktionen

$f(x) = \text{sign}(x)$ $\longrightarrow$ nicht stetig bei 0 , (Punkte können vermieden werden)

Bestimmter Integral in $[-1;2]$

Zerlegung in $[-1,0]$ und $[0,2]$

$$\int_{-1}^{2} \text{sign}(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{2} (+1)\, dx = -1 + 2 = 1$$

Uneigentliches Integral

unbeschränkte Integrationsintervalle

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{in} \quad [1, \infty)$$

$$\lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to \infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 1$$

„Integral ist konvergent"
„f ist uneigentlich integrierbar"

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{in} \quad [0, 1]$$

$$c \in (0,1) \quad \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to 0} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = \infty$$

„Integral ist divergent"

wenn f in $[a; b)$ stetig ist
heißt Punkt b singulär, wenn $b = \infty$ oder keinen rechtsseitigen Grenzwert hat

Wenn ein Integrationsintervall einen singulären Randpunkt hat,
muss es als Grenzwert definiert werden

$$[a; b) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx$$

„uneigentliches Integral"

bzw

$$(a; b] \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\, dx$$

bzw

$$(a; b) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Uneigentliches Integral

Beispiele

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$\int_1^c \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c^2} \rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2c^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{1+x^2} = \lim_{c\to\infty}\left(\arctan(c) - \arctan(0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Insgesamt $= \frac{3}{2}\pi$

Majorantenkriterium

$\int_a^b f(x)\,dx$ soll auf Konvergenz untersucht werden

wenn $|f(x)| \leq g(x)$ im Intervall und $\int_a^b g(x)$ konvergiert $\rightarrow$ Majorante

wenn $f(x) \geq g(x)$ im Intervall und $\int_a^b g(x)$ divergiert $\rightarrow$ $f(x)$ diverg.

DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

TESCHL

Funktion mit mehreren Variablen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

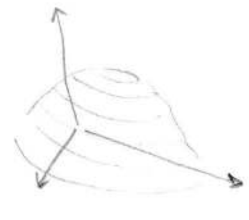
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{x})$$

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

Graph:



$$\{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$ Fläche in $\mathbb{R}^3$

Konvergenz

Vektor-Folge $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $\vec{x}_0$

wenn $\| x_k - x_0 \| = \sqrt{|x_{k1} - x_{01}|^2 + \dots + |x_{kn} - x_{0n}|^2}$ (Abstand) gegen 0 konvergiert.

$$\lim_{k \to \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \iff \lim_{k \to \infty} \| x_k - x_0 \| = 0$$

Notation:

$\vec{x}_k \longrightarrow \vec{x}_0$ Jede Komponente aus $x_k \longrightarrow$ jede K. aus x_0

Beispiel

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ \frac{2k}{k+1} \end{pmatrix} \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{k2}{k(1+\frac{1}{k})} = \frac{2}{1+\frac{1}{k}}$$

$$x_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{k^2}{k+1} \end{pmatrix} \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \end{pmatrix}$$ $\longrightarrow$ divergiert, kein Konvergenz-Vektor

$$\frac{k \cdot k}{k(1+\frac{1}{k})} = \frac{k}{1+\frac{1}{k}}$$

Grenzwert

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$

$y_0 \in \mathbb{R}$, Grenzwert von f an $x_0 \in D$ wenn für $\forall \overbrace{x_k \to x_0}^{x}$ gilt $\overbrace{f(x_k) \to y_0}^{y}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Beispiel

$$\underbrace{\lim_{x \to \binom{0}{2}}}\ \underbrace{\frac{x_2 (\sin(x_1))}{x_1}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$x_1 \to 0$ $\quad \frac{\sin(x_1)}{x_1} \to 1 \quad x_2 \to 2$

$x_2 \to 2$

Stetigkeit

Vereinfacht: wenn Grenzwert & Funktionswert übereinstimmen

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ stetig an x_0 wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

} wenn gültig für $\forall x$, $f(x)$ = stetig

Menge aller stetigen Funktionen in D: $C^0(D)$

Satz

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$
$g: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$
} stetig an x_0 $\Rightarrow$ $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) / g(x)$ } auch stetig bei x_0

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$
$g: C \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
} stetig an x_0 $\Rightarrow$ $g \circ f$ } stetig bei x_0

↑ 1 Dimensional

Beispiel, Stetigkeit

$$f(x) = \frac{x_1 \; x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Auf welchem $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $f(\vec{x})$ stetig?

$\{\forall x \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

„Vektorwertige Funktionen"

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

$$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \,, \quad \vec{x} \to \vec{f(x)}$$

Beispiel

gewinn $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ Produkt 1, Produkt 2

$$g_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 5v_1 - 3p_1 - 4$$

p_1 ... produzierte Menge

v_1 ... verkaufte Menge

$$g_2 \begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 6v_2 - 4p_2 - 5$$

$$g \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \Rightarrow g \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 - 3p_1 - 4 \\ 6v_2 - 4p_2 - 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{g} : D \subseteq \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$$

Stetigkeit für vektorwertige Funktionen

$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \quad y_0 \in \mathbb{R}^m$ ... Grenzwert an x_0

Wenn alle $x_n \mapsto x_0$, $f(x_0) \to y_0$

$\lim\limits_{x \to x_0} \vec{f}(x) = y_0$

$\vec{f}$ ist stetig an x_0 $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \vec{f}(x) = f(x_0)$

wenn gültig für $\forall x$, dann Funktion stetig

Menge $C^0(D, \mathbb{R}^m)$ für $\vec{f} : D \mapsto \mathbb{R}^m$

Satz

Bei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ muss jede einzelne Komponente stetig sein

Beispiel: Stetigkeit

Auf welchem D ist f(x) stetig?

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \cos(x_1, x_2) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1, x_2) \end{matrix}$$

Stetige Addition

Verkettung von Multiplikation = stetig

Stetig für $\forall x \in \mathbb{R}^2$

Ableitung

Bei Funktion mit einer Variable: Approximation mit Gerade

Mit mehreren Variablen: Approximation mit (Hyper) Ebene

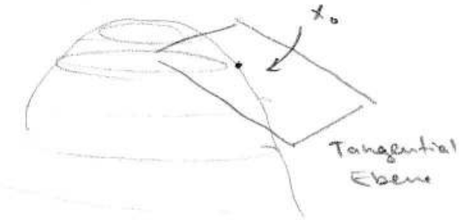
Beispiel

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$f(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ ⟶ Approximation an $x_0 = (x_{0,1} \; x_{0,2})$

$$f(x) \approx f(x_0) + a_1(x_1 - x_{0,1}) + a_2(x_2 - x_{0,2})$$

Normalform einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ — statt Gerade



Geht durch: $(x_{0,1}, x_{0,2}, f(x_0))$

⇓

$f(x_0) = f(x_0)$ weil

$$f(x_{01}, x_{02}) = f(x_{01}, x_{02}) + \underbrace{a_1(x_{01} - x_{01}) + a_2(x_{02} - x_{02})}_{=0}$$

Es müssen jetzt a_1 und a_2 bestimmt werden (Steigung), sodass alle weiteren Punkte vor und nach x_0 approximiert werden können.

Konkrete Bestimmung von x_0:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

$f(x_0) = 1$

Für alle anderen Werte außer x_0 gilt:

$$f(x) \approx 1 + a_1(x_1 - 1) + a_2 x_2$$

Bestimmung von a_1 und a_2 durch Partielles Differenzieren

Die Approximation hat bei x_0 den geringsten Fehler / ist am genauesten

$f(x) \approx 1 + a_1(x_1 - 1) + a_2 x_2$ $\qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analyse von allen x die $x_2 = 0$ haben: (Schnitt)

$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$

$f(x_1, 0) = 2 - x_1^2 \approx 1 + a_1(x_1 - 1)$

$\rightarrow g_1(x_1) = f(x_1, 0) = 2 - x_1^2 \approx 1 + a_1(x_1 - 1)$

$g_1'(x_1) = f'(x_1, 0) = -2x_1 \approx a_1$

$x_{01} = 1$ deshalb $g_1'(1) = a_1 = -2$

Analyse von allen x die $x_1 = 1$ haben: (Schnitt)

$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$

$f(1, x_2) = 2 - 1 - x_2^2 = 1 - x_2^2 \approx 1 + \overbrace{(-2)}^{a_1}(1 - 1) + a_2 x_2 = 1 + a_2 x_2$

$\rightarrow g_2(x_2) = f(1, x_2) = 1 - x_2^2 \approx 1 + a_2 x_2$

$g_2'(x_2) = f'(1, x_2) = -2x_2 \approx a_2$

$x_{02} = 0$ deshalb $g_2'(0) = 0 = a_2$

Korrekten Parameter

$a_1 = -2$ $\qquad f(x) \approx 1 + (-2)(x_1 - 1) + (0) \cdot x_2$

$a_2 = 0$ $\qquad f(x) \approx 1 - 2(x_1 - 1)$

Die partielle Ableitung

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ Ableitung von f nach Variablen x_j während man die restlichen Variablen als Konst. auffasst

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)}_{\text{Ableitung nach allen Variablen in } x_0} = g'_j(x_{0,j})$$

$g_j(x_j) = f(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots x_n)$

Beispiel: Partielle Ableitung

$$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\underbrace{(x_1, x_2)}_{f} = -2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}\underbrace{(x_1, x_2)}_{f} = -2x_2$$

Im Beispiel zuvor: Tangentialebene im Punkt $\binom{1}{0}$ durch

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,0) = -2 \qquad a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,0) = 0$$

→ a_1 und a_2 benutzt um Gleichung für Tangent. Ebene aufzustellen

Die Matrix der partiellen Ableitung

$\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

„Jacobi-Matrix"

Wenn jede Komponente stetig ist in ganz D dann $\in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

„Stetig differenzierbar"

Beispiel Jacobi - Matrix

a) $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}}$$

Beide Komponenten sind stetig

f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$

b) $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_2 + x_3^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \leftarrow f_3 \end{matrix}$$

$$f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2$$

$$f_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 + x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_3 \end{pmatrix}}$$

alle Komponenten stetig

$f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Kettenregel

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \qquad x_0 \in D$

$g: E \subseteq \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^k \qquad y_0 \in f(x_0) \in E$

$g \circ f \longrightarrow \frac{\partial\, g \circ f}{\partial x}(x_0) = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}_{\text{Jacobi-Matrizen Multiplikation}}$

> Bei Verkettung, linkes nach rechts verketten

Beispiel

$g(f(x)) \longleftarrow \sin(x_1^2 + x_2^2)$

$g(y) = \sin(y) \qquad g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Jacobi-Matrix von g: $\frac{\partial g}{\partial y} = \cos(y) = J_g$

Jacobi-Matrix von f: $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x_1 \;\; 2x_2) = J_f$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x_1^2 + x_2^2) = \cos(x_1^2 + x_2^2) \cdot (2x_1, 2x_2) =$$

$$= \left(2x_1 \cdot \cos(x_1^2 + x_2^2) \quad 2x_2 \cdot \cos(x_1^2 + x_2^2) \right)$$

$$\frac{\partial\, g \circ f}{\partial x} \longrightarrow J_g \cdot J_f$$

Höhere partielle Ableitungen (zB $f''(x)$, $f'''(x)$ ...)

Beispiel:

1. nach x_2 ableiten
2. danach nach x_1 ableiten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

„Ordnung" der Ableit.: 2

$\to \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$

Beispiele:

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

Zweimal nach x_1 ableiten

1. $\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \cdot x_2^3 = x_2^3$

2. $\frac{\partial}{\partial x_1} x_2^3 = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 3x_2^2$$

Nach x_1 danach x_2

1. $\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \cdot x_2^3 = x_2^3$

2. $\frac{\partial}{\partial x_2} x_2^3 = 3x_2^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 3x_2^2$$

Nach x_2 danach x_1

1. $\frac{\partial}{\partial x_2} x_1 \cdot x_2^3 = x_1 \cdot 3x_2^2$

2. $\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \cdot 3x_2^2 = 3x_2^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_1 \cdot x_2$$

Zweimal nach x_2

1. $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cdot 3x_2^2$

2. $\frac{\partial f}{\partial x_2} x_1 \cdot 3x_2^2 = x_1 \cdot 6 \cdot x_2$

Reihenfolge spielt keine Rolle!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$ ← vertauschbar

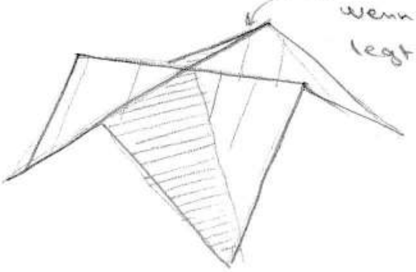
Differenzierbarkeit

existiert Tangentialebene für x_0 ?

Es kann $\underbrace{\text{partielle Ableitung}}_{\text{Steigung in versch. Koordinaten-Achsen}}$ geben aber keine Tangentialebene

Beispiel

$f(x,y) = 1 - \min(|x|, |y|)$



Wenn man hier Tangentialebene legt, merkt man nichts vom Trick

Beispiel

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$x_0 = (0,0)$

f ist unstetig bei $(0,0)$ aber es existiert trotzdem partielle Ableitung

$f(x_1, 0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$

$f(0, x_2) = 0$

Damit Tangentialebene $f(x)$ berühren kann muss Differenz zw $f(x)$ und Ebene schnell genug verschwinden

Beispiel

$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$

$x_0 = (1, 0)$

$$\text{Differenz } r(x) = \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{d} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}_{k} \underbrace{(x - x_0)}_{x}$$

$$\underbrace{r\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}} = \underbrace{f\begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}} - \underbrace{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}} - \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)}_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^2}}_{\text{Ableitung an dieser Stelle } \mathbb{R}^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^2}$$

$$(0 \; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}$$

✓

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|r(x)|}{\|x - x_0\|} = \frac{|f(x_1, x_2) - (1 - 2(x_1 - 1))|}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{für } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \quad (x - x_0) \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{|1 - 2x_1 + x_1^2 + x_2^2|}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} = 0 \checkmark$$

Differenzierbarkeit

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar an $x_0 \in D$ wenn

$\exists$ Matrix $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ (Ableitung an x_0) bzw (Ableitungsmatrix $A(x_0)$)

Sodass gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Jacobi Matrix =
Alle Ableitungen / Steigungen an jeder Koordinaten-Achse

f ist differenzierbar wenn $\forall x_0 \in D$ differenzierbar sind
wenn f an x_0 differenzierbar ist, ist es dort auch stetig

Alternativerweise: wenn x_0 an $f(x_0)$ stetig ist und in der $\underbrace{\text{Umgebung}}_{\text{Nähe}}$ eine Ableitung existiert, ist f an x_0 differenzierbar

Extreme

nur Sinnvoll für reelwertige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$

und nicht $f: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, weil Vektoren nicht sortiert werden können

$f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$

Änderung an Stelle $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ (Quasi eine einzelne Scheibe aus der 3D-Welt)

$g(t) = f(\vec{x}_0 + \vec{a}t)$

↓ nicht unbedingt in Richtung der Koordinaten-Achsen

Wenn f an $\vec{x}_0$ ein Extremum hat

muss an $g(0)$ auch ein Extremum sein

$$\vec{x} = \vec{x}_0 : g(0) = f(x_0 + a \cdot 0) = f(x_0)$$

Es muss $g'(0) = 0$ gelten für jede Richtung in $\vec{a}$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) \cdot \vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot a_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot a_2$$

$$= 0$$

Einfachere Lösung: Gradienten von f (Transponierte Jacobi Matrix)

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bedingung für Extremum:

$\operatorname{grad} f(x_0) = \vec{0}$ Nullmatrix

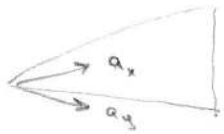
Geometrische Interpretation

Ableitung von g (Scheibe):

$$g'(0) = \langle \overrightarrow{\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)}, \vec{a} \rangle$$ Skalarprodukt aus Gradient $\cdot \vec{a}$

Steigung der Tangente an $g(0)$

Änderung von f in Richtung $\vec{a}$



Σ Änderung in $a_x + a_y$ = Änderung in Richtung a komponentenweise

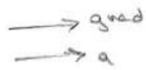
Deshalb ist

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \langle \operatorname{grad} f(x_0), \vec{a} \rangle$$

Eine Richtungsableitung

~~Das~~ Der Skalarprodukt beinhaltet den Cos des eingeschlossenen Winkels

Änderung ist am größten, wenn $\vec{a}$ parallel zu Gradient ist



Weil Gradient weist in die Richtung des größten Anstiegs

Beispiel Gradient

Extremstellen von $f(\vec{x}) = x_1(x_2 - 1) + x_1^3 = x_1x_2 - x_1 + x_1^3$

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 1 + 3x_1^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

I $\quad x_2 - 1 + 3x_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 - 1 + 0 = 0 \quad x_2 = 1$

II $\quad x_1 = 0$

$x_0 = (0, 1)$

Ist es ein Maximum oder Minimum?

Höhere Ableitung

$g(t) = f(\vec{x}_0 + \vec{a}t) \qquad g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ traversiert Schnitt

$g(t)$ als Taylor-Polynom

$$g(t) \approx \underbrace{g(0)}_{f(x_0)} + \underbrace{g'(0)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\, a} \cdot t + \frac{1}{2} \underbrace{g''(0)}_{a^T \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\text{„Hesse-Matrix"}}(x_0) \cdot a} t^2$$

„Hesse-Matrix"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_n} \end{pmatrix}$$

$$f(x_0 + \vec{a}t) = g(t) \approx f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\, a t + \frac{1}{2} a^T \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0) \cdot a t^2$$

Beispiel Hesse-Matrix

$$f(x) = x_1 (x_2 - 1) + x_1^3$$

partielle Ableitung 1. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 1 + 3x_1^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

partielle Ableitung 2. Ordnung bzw Hesse-Matrix

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 - 1 + 3x_1^2 = 6x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 - 1 + 3x_1^2 = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 1 \quad \text{(kein Unterschied)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hesse Matrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Satz

Wenn f ein Maximum hat, muss es auch ein Minimum haben

$$g''(0) = \vec{a}^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\vec{a} = \left\langle \vec{a}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \cdot \vec{a} \right\rangle < 0 \quad \Bigg\} \text{ Bedingung } a \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix also „negativ definit"

Satz

f hat bei x_0 ein lokales Max / Min wenn grad $f(x_0) = \vec{0}$

$$\text{grad } f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \vec{0}$$

oder

Die Hesse-Matrix positiv / negativ definit ist
(siehe Eigenwerte & Eigenvektoren in Band 1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \longrightarrow \text{pos / neg definit}$$

Nullstellen des Charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \vec{0}$$

wenn A symmetrisch ist (wie die Hesse-Matrix) sind Nullstellen reell:

positiv definit : Eigenwerte positiv → Minimum

negativ —"— : —"— negativ → Maximum

Sattelpunkt – Ausnahme

Eigenwerte haben verschiedene Vorzeichen → Sattelpunkt

Ein Eigenwert = 0 → keine Aussage möglich

Vereinfachte Regeln für 2 Dimensionen

(Determinante = Produkt der Eigenwerte)

$\text{grad } f(x_0) = \vec{0}$

$\det\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)}_{\text{Hesse}}\Big) > 0$ — Hesse > 0 Minimum; Hesse < 0 Maximum

Es kann auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$

$\det(\text{Hesse}) < 0$ —— Sattelpunkt

$\det(\text{Hesse}) = 0$ —— keine Aussage möglich

Beispiel

$f(x) = x_1(x_2 - 1) + x_1^3$

Welches Extremum liegt bei $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) - \lambda \mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Eigenwerte
$+1$
-1

Sattelpunkt

Teschl: Differentialrechnung in mehreren Variablen

$$\left.\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto f(x) \end{aligned}\right] \text{ Skalarwertige Funktion}$$

Konvergenz:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \iff \lim_{k \to \infty} \| x_k - x_0 \| = 0$$

Grenzwert:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ wobei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $y_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

Wenn $x_k \to x_0$ dann auch $f(x_k) \to y_0$

Stetigkeit:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig an $x_0 \in D$ wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left.\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto \vec{f(x)} \end{aligned}\right] \text{ Vektorwertige Funktion}$$

Grenzwert:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ wobei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^m$ $x_0 \in D$

wenn $x_n \to x_0$ dann auch $f(x_n) \to f(x_0)$

Stetigkeit:

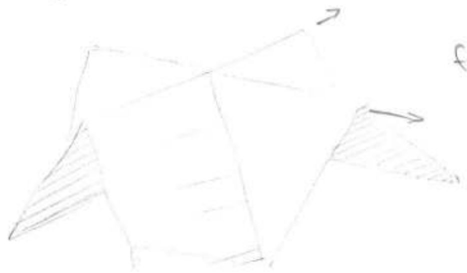
$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist stetig an $x_0 \in D$ wenn

jede Komponente $f_1 \dots f_m$ stetig ist

Partielle Ableitung ist nicht bez Stetigkeit aussagekräftig

Tangentialebene kann nur gebildet werden wenn stetig

Bsp



$f(x,y) = 1 - \min(|x|, |y|)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ weil nur 2 Achsen beobachtet werden

$f(x)$ ist entlang der Achsen unstetig aber $\exists$ partielle Ableitung

Bsp

$f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

$r(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{eig. Wert}} - \underbrace{\left(f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0)\right)}_{\text{lineare Appr.}} =$ Fehler

$x_0 = (1, 0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|r(x)|}{\|x - x_0\|}$ sollte $\to 0$

Fehler

Abstand zu x_0

Beweis:

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x,y) - (1 - 2(x-1))|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ✓

Das bedeutet $f(x)$ ist an x_0 differenzierbar

(Wenn differenzierbar, dann auch stetig)

Definition

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$

ist differenzierbar an $x_0 \in D$ wenn

$f(x) = f(x_0) + \underbrace{A(x_0)}_{\substack{\text{Ableitungs/} \\ \text{Jacobi-Matrix}}} (x - x_0) + r(x)$

Ableitungs/
Jacobi-Matrix $= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

und

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$

Bedingung für Stetigkeit

1. Wenn f an x_0 differenzierbar, dann dort stetig

2. Wenn J_f an jeder Komponente stetig denn ist f dort differenzierbar

$f(x) \approx f(x_0) + k(x - x_0)$

Ableitung

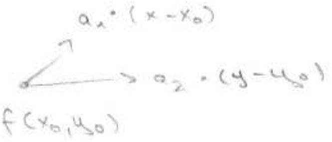
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ von Sekante zu Tangente bei einem Punkt

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ von 2 Sekanten entlang x und y Achse zu Tangentialebene

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$$

ist Normalform von Ebene in $\mathbb{R}^3$



a_1 und a_2 müssen gewählt werden damit gewünschter P berührt wird

Lösung: partielle Ableitung

$f(x,0) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \to a_1$

$f(0,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} \to a_2$

Problem: Es kann partielle Ableitung existieren aber Funktion unstetig sein!

Jacobi - Matrix

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = J_f$$

wenn J_f stetig in D ist, ist f stetig differenzierbar

Extreme

nur sinnvoll für skalarwertige Funktionen $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Idee

Um einen Extrempunkt zu finden müsste man in allen Richtungen 360° ableiten und immer 0 erhalten:

beliebige Richtung $\vec{v}$: $g(t) = f(x_0 + \vec{v} \cdot t)$

wenn $t = 0 \rightarrow g(0) = f(x_0)$

Wir wollen, dass $g'(0) = 0$

$$g'(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \cdot v_j$$

konkret in diesem Fall:

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}_{f_x(x_0)} \cdot v_x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)}_{f_y(x_0)} \cdot v_y = 0$$

Gradient

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{J_f}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient ist eine Funktion mit Output $\mathbb{R}^n$, dess komponentenweise partiell ableitet

Wenn Extremstelle, dann $\operatorname{grad} f(x_0) = \vec{0}$

Zusammenhang

$g'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$ Richtungsableitung

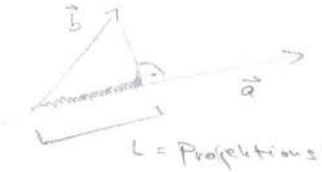
wenn Richtung $\vec{v} \parallel \nabla f(x_0)$ dann Resultat am größten (größte Steigung)

und wenn $\vec{v} \perp \nabla f(x_0)$ dann Resultat $= 0$

$\Rightarrow$ deshalb zeigt $\operatorname{grad} f(x_0)$ auf Richtung mit höchster Steigung!

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = l \cdot \vec{a}$



→ deshalb ist $\langle a, b \rangle = 0$ wenn $a \perp b$

Richtungsableitung von f Richtung $\vec{v}$

Sinnvollen wenn $\vec{v}$ normiert ist, $\| \vec{v} \| = 1$
weil es sonst ein Vielfaches der Ableitung erzeugt

∂f ← unendlich kleiner Schritt in f(x) - Richtung
∂x ← unendlich kleiner Schritt in x - Richtung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a,b)}{h}$$

Alternative Definition:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + \binom{1}{0} \cdot h) - f(\vec{p})}{h}$$

$\Downarrow$

Ableitung Richtung $\vec{v}$ mittels grad f bzw ∇f

$$\nabla_v f(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h \cdot \vec{v}) - f(\vec{a})}{h \cdot \|\vec{v}\|}$$ ← wenn nicht normiert

Angenommen

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\nabla_w f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = \langle \nabla f \cdot \vec{w} \rangle$$

Beispiel

$$f(x,y,z) = x(y-1) + z^3 \quad \longrightarrow \text{gesucht: Extremstellen}$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} y-1+3x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y - 1 + 3x^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right] \quad x_0 = (0,1)$$

Um zu bestimmen ob Max oder Min:

Hesse - Matrix

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

hier:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\longrightarrow$ abhängig davon ob pos, neg - definit oder indefinit

Taylor-Polynom in $\mathbb{R}^2$

$$f(x_0 + at) \approx f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \cdot at + \frac{1}{2} a^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \cdot at^2$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Beispiel

Bakterienpopulation $x(t)$ $\qquad \frac{d}{dt} x(t) = \mu \cdot x(t)$ $\qquad \mu > 0$ Wachstumsrate

Zeit t

Definition „gewöhnliche Differentialgleichung"

Gleichung verbindet Funktion mit Ableitungen

$$F(x^{(n)}(t), \dots, x^{0}(t), t) = 0 \qquad \text{(stetige Funktion } F\text{)}$$

n: Ordnung

Lässt sich nach der höchsten Ableitung lösen

$$x^{n}(t) = f(x^{(n-1)}(t), \dots, x(t), t)$$

Wenn f nicht von t abhängt: autonome Differentialgleichung

Wenn $x(t)$ die Differentialgleichung erfüllt: Lösung

Die Lösung muss meistens in einem Intervall sein mit einem bestimmten Anfangswert

$$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \dots, x(t_0) = x_0 \qquad \text{Anfang: } t_0$$

Beispiel

$x''(t) + x(t) = 0$ „autonome Differentialgleichung 2. Ordnung"

Eine Lösung:

$x(t) = \cos(t) \qquad x''(t) + x(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0$

Keine Lösung:

$x(t) = t^2 - 3 \qquad x''(t) + x(t) = 2 + t^2 - 3 = t^2 - 1 \neq 0$

Definition: „partielle Differentialgleichung"

Beispiel

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = 0$$

Beispiel

$$x'(t) = \mu\, x(t) \qquad \mu > 0$$

Wir raten: $(e^x)' = e^x \rightarrow$ mögliche Lösung

$x(t) = e^{\mu t}$

$x'(t) = \mu e^{\mu t} = \mu\, x(t) \longrightarrow$ Darf mit C multipliziert werden

$x(t) = \underline{C}\, e^{\mu t} \qquad x'(t) = \underline{C}\, \mu e^{\mu t}$

$x(t) = x_0 \cdot e^{\mu t}$

Es müssen x_0 und μ festgelegt werden $\longleftarrow$ $t = 0$

$x(0) = C$

$x(0) = x_0$

„Logistisches Wachstumsmodell"

Setzt Obergrenze für Population

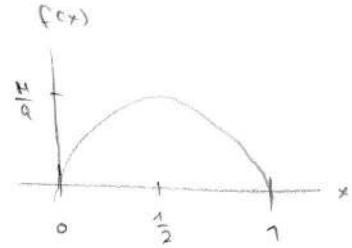
Obergrenze $x = 1$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \mu\, \underbrace{(1 - x(t))}_{\text{verbleibende Kapazität}} \cdot x(t)$$

Was ist die Lösung?

Qualitative Diskussion

Verhalten von f: $f(x) = \mu(1-x) \cdot x$ (Ableitung)



wenn $x_0 > 1$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$

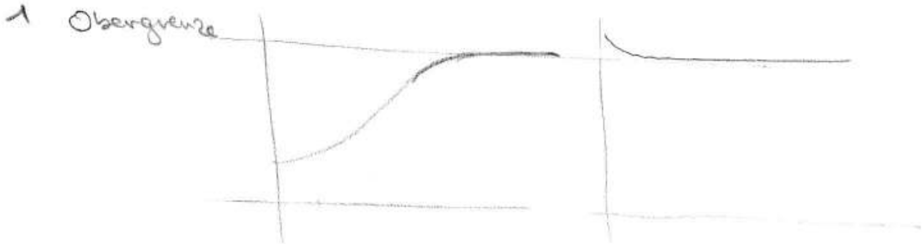
$f(x_0) < 0$

wenn $x_0 < 1$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$

$f(x_0) > 0$

Mögliche Kandidaten für Lösung



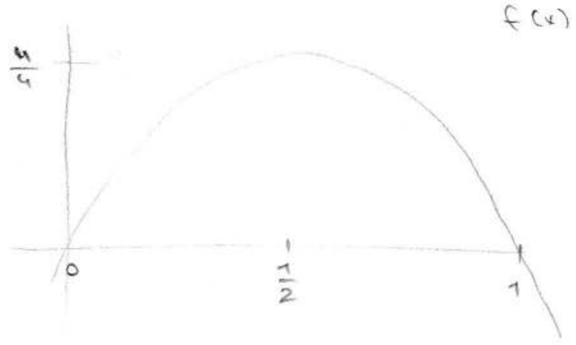
Beispiel: logistisches Wachstum mit Ernte

es wird $h>0$ geerntet und man sucht die Optimale Ernte-Menge

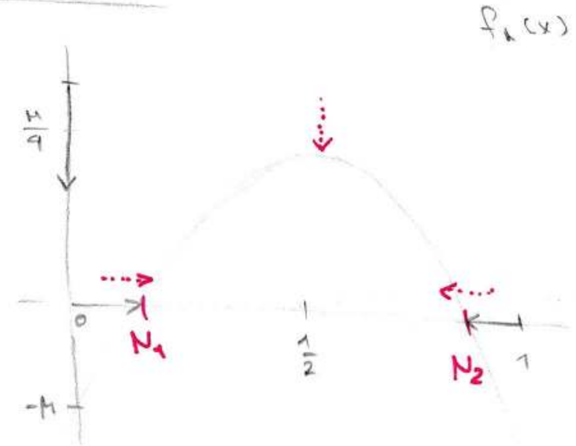
$$\frac{d}{dt} x(t) = \mu \, (1 - x(t)) \cdot x(t) \; \underbrace{-\, h}_{}$$

Verschiebung der Parabel nach unten

Original



Verschoben



Fallunterscheidung:

$0 < h < \frac{\mu}{4}$ Höhepunkt bleibt über 0

- wenn x_0 vor N_1 liegt, dann konvergiert sie gegen $x=0$ (Auslöschung)
- wenn x_0 zwischen $N_1, N_2 \to N_2$
- wenn x_0 nach $N_2 \to N_2$

$h = \frac{\mu}{4}$ Höhepunkt bei 0 bzw N_1, N_2

- wie letztes Fall

$h > \frac{\mu}{4}$ keine Nullstellen

- egal wo x_0 angesetzt wird $\to 0$

Maximale Ernte bei $h = \frac{\mu}{4}$ weil dadurch
wenn $x_0 \geq \frac{1}{2}$

Sobald durch eine Störung aber $x \leq \frac{1}{2}$ stirbt Population aus
Lösung daher instabil

(Stabile Lösung: $h < \frac{\mu}{4}$ dann ist Bereich nach N_2 stabil für x_0
weil durch Überschreitung die Population trotzdem zurück konvergiert) Praktischer

Satz

$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$ Autonome Differentialgleichung 1. Ordnung

Es existiert zu jeder Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ eine eindeutige Lösung im Intervall um $t=0$

wenn $f(x_0) = 0$ ... Fixpunkt / Gleichgewichtslage

wenn $f(x_0) \neq 0$ ... konvergiert $x(t)$ gegen erste Nullstelle von $f(x_0)$ oder $\pm\infty$

Man sagt ein Fixpunkt x_0 ist <u>asymptotisch stabil</u> wenn alle Werte um x_0 herum nach x_0 konvergieren. $f'(x_0) \leq 0$

Beispiel

$f(x) = \mu(1-x)x = \mu x - \mu x^2$

$x_0 = 1 \longrightarrow$ asymptotisch stabil

$f'(x) = \mu - 2\mu = -\mu$

$f'(1) = -\mu < 0 \longrightarrow$ erfüllt Bedingung

$\longrightarrow$ Lösung der logistischen Gleichung

$$\frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} = \mu$$

$$\int_0^t \frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} = \int \mu$$

$\downarrow$

[...]

$\downarrow$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\mu t}}{1 + x_0(e^{\mu t} - 1)}$$

$\mu = 1$

$x_0 = 0{,}2$ bzw $x_0 = 1{,}2$

„Separation der Variablen"

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))\, g(t) \quad x(t_0) = x_0$$

kann durch

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

gelöst werden

Beispiel

$$x'(t) = \mu \cdot x(t)(1-x(t))$$

$$\frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} = \mu$$

$$\int_{0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)(1-x(s))} ds = \int_0^t \mu \, ds$$

UNKLAR

x_0

$$y = x(s)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y(1-y)} = \mu t - 0$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

$$\ln(x(t)) - \ln(1-x(t)) - \ln(x_0) + \ln(1-x_0) = \ln \frac{x(t)(1-x_0)}{(1-x(t))x_0} = \mu t$$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\mu t}}{1 + x_0(e^{\mu t} - 1)}$$

Satz von Picard-Lindelöf

wenn f stetig differenzierbar ist hat

$$x^{n}(t) = f(x^{n-1}(t), \ldots, x(t), t)$$

$$x^{(n-1)}(t_0) = \ldots \quad x(t_0) = x_0$$] Anfangsbed.

für jede beliebige Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung die in einem offenen Intervall um t_0 definiert ist

Satz **allgemeine Lösung** n-ter Ordnung

hängt von n Parametern ab

Aus der allgemeinen Lösung kann jede Lösung ermittelt werden mit $\underbrace{\text{Parameter}}_{}$

abhängig Anfangsbed.

Beispiel

DGL 1. Ordnung

$x(t_0) = x_0$ $\rightarrow$ setzt Lsg eindeutig fest **spezielle Lsg**

DGL 2. Ordnung

$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{array}\right\}$ setzt Lsg eindeutig fest **spezielle Lsg**

Beispiel

$x'(t) = x(t)^2$

$x(0) = x_0$

Trennung der Variablen

$$\frac{dx}{x^2} = dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \longrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t - 0$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

Lösung bei $t = \frac{1}{x_0}$ Polstelle!

$t := (-\infty ; \frac{1}{x_0})$

$x_0 = 0$

$x(t) = 0$

Lineare Differentialgleichungen

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten sind die einzigen die gelöst werden können

Definition: Lineare DGL n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t) \underbrace{x^{(j)}(t)}_{\text{j-te Ableitung}} + g(t) =$$

$$= c_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + c_{n-2}(t)\, x^{(n-2)}(t) + \dots + c_0(t)x(t) + \underbrace{g(t)}_{\substack{\text{quasi}\\ \text{Störfaktor}\\ \text{nur additiv}}}$$

Wenn $g(t)=0$ für alle t, dann homogen

wenn $g(t) \neq 0$ dann inhomogen „inhomogener Anteil"

wenn c_j nicht von t abhängt, dann konstant

wenn konstant und $g(t)$ auch konstant oder null dann autonom

Beispiele

a) $x'(t) = 3x(t) - t^2$

linear

inhomogen wegen t^2

konstant, $c_0 = 3$

Ordnung $= 1$

b) $x'''(t) = x'(t) + x(t)^2$ → nicht linear

c) $y''(x) = \sqrt{2}\, y(x)$

linear

homogen

konstant

Ordnung $= 2$

d) $y''(x) = 4y'(x) + x^3 y(x)$

linear

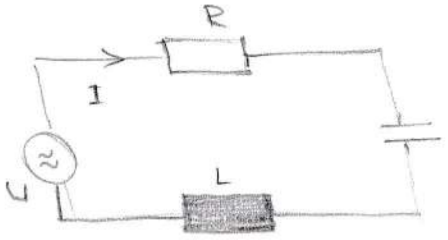
homogen

nicht konstant

Ordnung 2

e) $f''(t) = \underbrace{(1 - f'(t))\, f(t)}_{\text{nicht linear}}$

Beispiel



„RLC - Schwingkreis"
„Reihenschaltung"

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t)$$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} I(t) \longleftarrow \quad I(t) = \frac{d}{dt} Q(t)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} Q(t)$$

Umformuliert.

$$L \frac{d^2}{dt^2} I(t) + R \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d}{dt} U(t)$$

Ladevorgang

$$R \frac{d}{dt} Q(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U_0$$

was ist $\lim_{t \to \infty} Q(t)$?

$$\frac{dQ}{\frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} Q} = dt$$

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dy}{\frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot y} = \int_0^t ds$$

$$-RC \left(\ln\left(\frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} Q(t)\right) - \ln\left(\frac{U_0}{R}\right)\right) = t$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{U_0 C} Q(t)\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$Q(t) = U_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Lösung von lin DGL 1. Ordnung:

$$x'(t) = c \cdot x(t) \qquad\qquad x'(t) = c\,x(t) + g(t)$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^{ct} \qquad\qquad x(t) = x(t_0) \cdot e^{c(t-t_0)}$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Definition

$$F(x^{n}(t), \ldots, x''(t), x'(t), x(t), t) = 0$$

Gleichung verknüpft Funktion mit Ableitung davon

n = Ordnung der DGL

nicht abhängig von t = autonom

Funktion die Gleichung erfüllt = Lösung

(möglicherweise mit spezifischem Anfangswert)

Beispiel:

$x''(t) + x(t) = 0$

Lösung: $-\cos(t) + \cos(t) = 0$

Satz:

$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$ autonome DGL, erster Ordnung

Zu jeder Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ gibt es eine eindeutige Lsg die in offenem Intervall um $t = 0$ definiert ist

- wenn $f(x_0) = 0$: $x(t) = x_0$ für $\forall t$ (Gleichgewicht / Fixpunkt)
- wenn $f(x_0) \neq 0$: $x(t)$ konvergiert gegen erste Nullstelle links $(f(x_0) < 0)$ bzw rechts $(f(x_0) > 0)$

wenn es keine Nullstelle gibt: $\to \pm\infty$

$\Downarrow$

Eine Gleichgewichtslage / ein Fixpunkt heißt asymptotisch stabil, wenn in einem offenen Intervall um x_0 alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen x_0 konvergieren

$f'(x_0) < 0$: Fixpunkt asymp. stabil

$f'(x_0) > 0$: Fixpunkt nicht asymp. stabil

Trennung / Separation der Variablen

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \cdot g(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

→ Alle von t abhängigen Parameter auf einer Seite

Alle von t unabhängigen Parameter auf der anderen Seite

Ermittlung der Lösung durch:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\, dt$$

Satz Picard - Lindelöf

DGL hat mit Anfangsbedingungen immer eindeutige Lsg im offenen Intervall

Die Allgemeine Lösung von DGL nter Ordnung hängt von n Parametern ab.
Man erhält jede mögliche spezielle Lösung durch Parameterwahl

Beispiel : 1. Ordnung Parameter : $x(t_0) = x_0$
2. Ordnung $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$

Beispiel: Separation der Variablen

$$x'(t) = \mu\, x(t)\,(1 - x(t))$$

$$\frac{x'(t)}{x(t)\,(1 - x(t))} = \mu$$

$$\int_{x_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)\,(1 - x(s))}\, ds = \int_{x_0}^{t} \mu\, ds \to \mu t$$

$$y = x(s)$$

$$\frac{dy}{ds} = y'(s) \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{1}{x'(s)} \qquad ds = \frac{dy}{y'(s)}$$

$$\to \int_{x_0}^{t} \frac{x'(s)}{y - (1-y)} \cdot \frac{dy}{x'(s)} = \int_{x_0}^{t} \frac{dy}{y - (1-y)} = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\, dy =$$

$$\underbrace{\ln(x(t)) - \ln(1 - x(t))}\, - \underbrace{\ln(x_0) + \ln(1 - x_0)} =$$

$$\ln \frac{x(t)\,(1 - x_0)}{(1 - x(t))\, x_0} = \mu t$$

Aufgelöst

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\mu t}}{1 + x_0 (e^{\mu t} - 1)}$$

Beispiel: Separation der Variablen

$$\underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{x'(t)} = \underbrace{2\sqrt{x(t)}}_{f(x(t))} \qquad x(0) = x_0 \geq 0$$

gesucht: Lsg für $x_0 = 3$ oder 0

$g(t) = 1$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1 \cdot dt$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^t 1 \, dt \quad \rightarrow \sqrt{x(t)} - \sqrt{x_0} = t - 0$$

$$x(t) = (t + \sqrt{x_0})^2 \qquad x_0 \geq 0$$

Allgemeine Lösung, man muss nur Parameter einsetz.

Lineare Differentialgleichungen

$$x^{n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t) \cdot x^{j}(t) + g(t)$$

$$= c_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + c_{n-2}(t)\, x^{n-2}(t) + \dots + c_0\, x(t) + \underbrace{g(t)}_{\text{inhomogener Teil}}$$

autonom: homogen mit
konst. Koeffizienten

Lösung:

$$x'(t) = c\, x(t) + g(t)$$

$$x(t) = x(t_0)\, e^{c(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{c(t-s)}\, g(s)\, ds$$

Kapitel 7

Differenzengleichungen

Inhaltsverzeichnis

Differenzengleichungen

Einführung und Beispiele

Mit Differenzengleichungen definiert man die Schrittfolge von Rekursionen. Dabei startet man entweder mit einer bereits gegebenen Rekursion (Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a_n}{x_n}\right)$$

oder bildet sich eine Rekursion aus einer Summe:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = x_n \to x_{n+1}$$
$$= x_n + q^{n+1}$$

Ordnung einer Rekursion

> Differenzengleichung 1. Ordnung: $x_{n+1} = f(x_n)$
> Differenzengleichung 2. Ordnung: $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$
> Differenzengleichung k. Ordnung: $x_{n+\mathrm{k}} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$

Lässt sich die Aufgabenstellung in der oberen Schreibweise anschreiben (nur x_{n+k} auf der linken Seite), spricht man von einer **expliziten** Differenzengleichung.

Gleichgewichtslage

Die Gleichgewichtslage bzw. Gleichgewichtslösung ist der Wert, gegen den die Rekursion konvergiert. Beim Babylonischen Wurzelziehen konvergiert die Rekursion natürlich gegen $\sqrt{a}$.

Differenzengleichung 1. Ordnung

Eine Differenzengleichung 1. Ordnung bedeutet, dass die Rekursion nur über den letzten Schritt definiert ist.

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Dabei sind a und b die Koeffizienten und beschreiben die Änderung zum vorherigen Schritt.

Konstante Faktoren

Wir gehen davon aus, dass a und b konstant sind! Die homogene Lösung kann nach folgender Vorschrift gebildet weren:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & a \neq 1 \\ x_0 + bn, & a = 1 \end{cases}$$

Allgemeine lineare Differenzengleichung erster Ordnung

Sind die Koeffizienten a und b **nicht konstant**, so liegt der allgemeine Fall einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung vor:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

a_n und b_n sind beliebige Funktionen. Der Term $\boldsymbol{b_n}$ heißt Störfunktion. Gilt $b_n = 0$ so nennt man die Gleichung eine **homogene** Gleichung, ansonsten wird sie **inhomogene** Gleichung genannt.

Bei der Lösung solcher Rekursionen, werden immer zuerst die homogene Gleichung und anschließend die Störfunktion betrachtet. Die Lösung ergibt sich dann mit:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

Elementare Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen – Einführung und Allgemeine Theorie

Wofür brauche ich überhaupt Differentialgleichungen?

Das sind Gleichungen wo der Differentialquotient dabei ist. Also brauche ich das immer, wenn ich eine Änderung beschreiben will. Beispiele dafür wären Wachstumsmodelle, Chemische Modelle, Zerfallsmodelle.

Ich betrachte also den Zuwachs/die Abnahme, welcher proportional zur momentan Größe ist.

Allgemeine Lösung

Bei einfachen Differentialgleichungen ist meistens eine Funktion gegeben, die eine bis mehrere Konstanten $C_1, C_2, \ldots$ enthält. Diese Funktion nennt man allgemeine Lösung. Dabei muss noch unterschieden werden, welche Form diese Funktion hat:

> Implizite Funktion: $f(x,y) = Konstante \Rightarrow$ Keine Darstellung für y alleine
> Explizite Funktion: $y = f(x) \Rightarrow$ Klassische Form

Zum Beispiel wäre eine allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} - 2\ln x + \frac{1}{3}$$

Partikuläre Lösung

Sind Anfangsbedingungen gegeben, dann kann man sich eine partikuläre Lösung berechnen. Diese Lösung stimmt jedoch NUR, wenn auch diese Anfangsbedingungen gelten.

$$y(1) = \frac{2}{3};\ y'(1) = -1$$

Mit diesen Angaben, können wir $C_1 = \frac{1}{3}$ und $C_2 = 0$ berechnen. Damit lautet unsere partikuläre Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x + \frac{1}{3}$$

Es ergeben sich somit für verschiedene Anfangsbedingungen verschiedene partikuläre Lösungen.

1. Ableitung

Manchmal weiß man aus einer Problemstellung nur die Anfangsbedingungen und eine Problemstellung. Zum Beispiel hat mein eine bestimmte Menge, die mit der Zeit und in Relation zur aktuellen Menge abnimmt. Somit wissen wir nur die Änderung, also die 1. Ableitung. Diese besteht aus der Zeit und einem Koeffizienten p, der Abnahme/Zunahme beschreibt.

$$y'(t) = t * p$$

Ist $p > 1$ findet eine Zunahme statt, $p < 1$ beschreibt eine Abnahme und $p = 1$ würde eine konstant bleibende Menge bedeuten. Die Stammfunktion und allgemeine Lösung sieht demnach so aus:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 * p + C$$

Weitere Beispiele

Beispiel 1: Der freie Fall

Sei $s(t) = Weg(Zeit), g = Erdbeschleunigung = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$$s''(t) = g = gewöhnlich\ Differentialgleichung\ 2. Ordnung\ für\ s(t)$$

$$\Rightarrow s'(t) = g * t + C_1$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Das ist die allgemeine Lösung. Theoretisch gibt es unendlich viele Lösungen, da ich ja die zwei Konstanten beliebig wählen.

C_1, C_2 sind also durch Anfangsbestimmungen bestimmt. Zum Beispiel:

$$s(0) = s_0, \qquad v(0) = s'(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = V_0, C_2 = s_0$$

Ich erhalte also eine partikuläre (=spezielle, eindeutige) Lösung: $s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

Schwerer wird es, wenn auf der rechten Seite nicht nur eine Konstante ist, sondern eine weitere Ableitung stehen würde.

Beispiel 2: Logistisches Wachstum aus der Biologie

Beschreibt ein Wachstum, bei dem eine Sättigung bzw. Dämpfung vorkommt. Zum Beispiel die Erdbevölkerung. Sie wird nicht ewig wachsen, irgendwann ist der Lebensraum beschränkt und das Wachstum dämpft sich ein.

Sei $N(t) = Populationsgröße(Zeit), v\ Wachstumsrate, K\ Sättigungskonstante$

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = gewöhnlich\ Differentialgleichung\ 1. Ordnung\ für\ N(t)$$

Am Anfang wächst alles exponentiell. N wächst aber immer mehr und je näher ich an die Sättigungskonstante herankomme, des so größer wird $\frac{N}{K}$. Ist die Sättigungskonstante K erreicht, so gilt $\frac{N}{K} = \frac{K}{K}$ und es findet kein Wachstum mehr statt.

Lösung: $N(t) = \frac{K}{1+C*e^{-rt}}, C \in \mathbb{R}$ oder $N = 0$

Denn: $N' = -\frac{K}{(1+Ce^{-rt})^2} Ce^{-rt}(-r) = \frac{KCre^{-rt}}{(1+Ce^{-rt})^2}$

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \cdots = \frac{KCre^{-rt}}{(1+Ce^{-rt})^2}$$

Zur Berechnung einer partikulären Lösung brauche ich wieder Anfangsbedingungen:

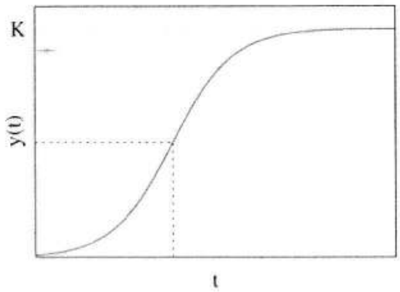
Anfangsbedingung: $N(0) = N_0 : N_0 = \frac{K}{1+C*1} \Rightarrow C = \frac{K}{N_0} - 1 = \frac{K-N_0}{N_0}$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0} e^{-rt}} = partikuläre\ Lösung$$

Die partikulären Lösungen sind also abhängig davon, wie ich meine Anfangsbedingungen wähle, da sich z.B. die Gleichung durch das wählen von $t = 0$ erheblich vereinfachen kann.

Also ist für diese Anfangsbedingung die partikuläre Lösung viel einfacher, als für andere t-Werte.

Ein weiteres Beispiel mit diesem Wachstum wäre der Markt vom iPhone 5. Am Anfang kaufen es viele und irgendwann hat Jeder eines, die Anderen wollen aus Prinzip keines, und es pendelt sich ein.



Beispiel 3: Diffusionsgleichung, Wärmeleitungsgleichung

Sei $c(x,t) = Konzentration(Ort, Zeit), D = Diffusionskonstante$

D beschreibt die Ausbreitung der Wärme und ist materialspezifisch.

$$\frac{\delta c}{\delta t} = D * \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} \; partielle\ Differenzgleichung\ 2. Ordnung$$

Eine Lösung ist z.B.: $c(x,t) = \big(A * \cos(Cx) + B\ sin(Cx)\big)e^{-c^2 Dt}$ $\quad A, B, C \in \mathbb{R}\ beliebig$

Dieses Beispiel ist schon viel komplexer, da ich drei Konstanten habe, die ich beliebig wählen kann.

Allgemein

$$y(x), Ableitungen\ y', y'', \dots, y^{(n)}$$

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0\ heißt\ gewöhnliche\ Differentialgleichung\ n - ter\ Ordnung$$

Insbesondere $F(x, y, y') = 0\ heißt\ gewöhnliche\ Differentialgleichung\ 1. Ordnung$

$$y' = f(x, y)\ heißt\ explizite\ Differentialgleichung\ 1. Ordnung$$

Lösungen

> Allgemeine Lösung z.B.: $s(t) = \frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$ entspricht einer Kurvenschar

> Partikuläre Lösung z.B.: Logistische Gleichung mit $N_0 = \frac{K}{2}$

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}}$$

> Singuläre Lösung (nur selten) z.B..: $N = 0$

Lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form:

$$y' + a(x)y = \begin{cases} 0 & \textit{homogene Gleichung} \\ s(x) & \textit{inhomogene Gleichung} \end{cases}$$

$s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Die Lösung einer linearen Differentialgleichung der Form $y' + a(x)y = s(x)$ ist durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ gegeben.

Dabei wendet man folgenden Lösungsweg an:

> Lösung der homogenen Gleichung durch „Trennung der Variablen"
> Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung durch „Variation der Konstanten"
> Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form:

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 & \textit{homogene Gleichung} \\ s(x) & \textit{inhomogene Gleichung} \end{cases}$$

a und b sind konstante Koeffizienten. $s(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Die Lösung einer linearen Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = s(x)$ ist durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ gegeben.

Dabei wendet man folgenden Lösungsweg an:

> Lösung der homogenen Gleichung durch einen Exponentialansatz
> Bestimmung einer partikulären Lösung mit Hilfe eines unbestimmten Ansatzes
> Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Meist ist eine charakteristische Gleichung gegeben, aus der wir λ_1, λ_2 erhalten. Die homogene Lösung ist dann:

$$y_h(x) = f(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, & \textit{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \textit{ reell} \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), & \textit{falls } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \textit{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, & \textit{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \textit{ reell} \end{cases}$$

Für die partikuläre Lösung müssen wir die Störfunktion näher betrachten:

Störfunktion $s(x)$	**Versuchslösung $y_p(x)$**
$\mathbf{1}$	A
e^{rx}	Ae^{rx}
$\sin rx$ oder $\cos rx$	$A \sin rx + B \cos rx$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k)e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k)e^{rx}$